

## Lezione 24 maggio 2018

Riprendiamo l'argomento dell'analisi in risposta in frequenza per sovrapposizione nodale affrontato nell'ultima lezione. Il pdf si trova al seguente link:

[https://cdm.ing.unimo.it/dokuwiki/media/wikitelai02016/mia\\_dispensa\\_dinamica\\_updated.pdf](https://cdm.ing.unimo.it/dokuwiki/media/wikitelai02016/mia_dispensa_dinamica_updated.pdf)

Inoltre, si può fare riferimento anche alle lezioni degli anni precedenti a questo link:

<https://cdm.ing.unimo.it/dokuwiki/wikipaom2016/lab11>

L'analisi di risposta in frequenza di una struttura si fa sostanzialmente risolvendo questa equazione:

$$(-\omega^2 M + j\omega C + K) \bar{x} = \bar{f}$$

che è l'equazione dinamica discretizzata in cui si suppongono dei moti specificatamente armonici e la soluzione di questo sistema, va ripetuta per ogni valore specifico della omega, che è la pulsazione della forzante armonica.

Poiché per ogni diversa frequenza della forzante armonica devo riscrivere la matrice di sistema e risolvere il sistema, senza far variare la forzante, posso cambiare anche gli altri termini f,K,C e M, che quindi possono essere in funzione della frequenza senza particolari problemi.

Quindi se uno dovesse definire un termine dello smorzamento che varia con la frequenza, si ha che questo è tipico negli smorzamenti di tipo viscoso, che vogliono rappresentare gli smorzamenti strutturali, dunque non c'è nessun problema nel definire quei termini in funzione della frequenza.

Sostanzialmente, se la mia matrice di smorzamento C non è rappresentabile in forma proporzionale, mi fermo. Tuttavia, esiste un caso in cui la mia matrice smorzamento è rappresentabile come:

$$C = \alpha M + \beta K$$

Cioè con un coefficiente alfa moltiplicato la matrice massa più un coefficiente beta moltiplicato per la matrice rigidità, si ha la possibilità di effettuare un calcolo più rapido della risposta in frequenza.

Più rapido perché le incognite coinvolte sono minori, ma anche perché da quel calcolo si riesce a capire meglio su come si comporterà il sistema.

Allora, tutto si gioca nel fatto che gli autovalori sono ortogonali, anche se gli autovalori sono ortogonali nei problemi standard, in realtà nel problema generalizzato gli autovalori non sono propriamente ortogonali tra loro, cioè:

Gli autovalori  $\hat{x}_i$  sono tutti generalmente indipendenti.

Tuttavia, non è vero che il prodotto scalare  $\langle \hat{x}_i, \hat{x}_j \rangle = 0$  con  $i \neq j$ , ossia, non è vero che sono ortogonali, questo succede se sono autovettori lineari di un problema agli autovalori standard.

Quello che è effettivamente uguale a zero è:  $\langle \hat{x}_i, \mathbf{M} \hat{x}_j \rangle = 0$  cioè i modi propri non sono ortogonali fra loro, ma per trovare le condizioni di ortogonalità, bisogna trovare che il modo descritto dall'iesimo modo proprio è ortogonale alle forze generalizzate associate al jesimo modo proprio e, allo stesso modo, un modo descritto come scalatura dell'iesimo modo proprio è ortogonale alle reazioni elastiche associate al jesimo modo proprio:  $\langle \hat{x}_i, \mathbf{K} \hat{x}_j \rangle = 0$ .

Ovviamente, non c'è nessuna relazione, o meglio nessuna proprietà, associata alla matrice smorzamenti per il semplice fatto che C non è usata per ricavare gli autovalori e gli autovettori:  $\langle \hat{x}_i, \mathbf{C} \hat{x}_j \rangle \neq 0$ , a meno che non dica che  $C = \alpha M + \beta K$  e allora si scompone nelle due relazioni.

Se consideriamo non una generica deformazione del sistema, ma una deformazione che sia definita dalla combinazione lineare di n modi propri. Qui di seguito ci sono i primi m:

$$\hat{X} = [\hat{x}_1 \cdots \hat{x}_i \cdots \hat{x}_m]$$

Non per forza deve essere questa la scelta, cioè è la tipica scelta, ma a volte si ha un sistema che è sollecitato in un ristretto range di frequenze che non comprende lo 0. Se ad esempio abbiamo un motore elettrico che ha risposta in frequenza in un range compreso tra i 500 ed i 600 Hz, possiamo dire che tutti i fenomeni dinamici saranno associati ad eventuali risonanze dei modi che sono in vicinanza di quel range quindi appunto da 500 a 600 Hz; probabilmente, per fare un'analisi dinamica in questo caso non conviene prendere i modi da 0 a 800 Hz (si considera la sicurezza), ma conviene prendere i modi propri che hanno una frequenza propria da 300 a 800 Hz, quindi, non saranno i primi m modi propri, ma gli m modi propri in un determinato range.

Allora, se ho un range di frequenze bisogna prendere tutti i modi propri di quel range e poi sicuramente i modi propri prossimi al range, se si sceglie di escludere un modo proprio il sistema non solo non avrà un modo amplificato secondo quel modo proprio, ma non avrà proprio modo, cioè si esclude qualunque forma di oscillazione secondo quel modo proprio. Solitamente, si aggiunge un 50% di range sopra e un altro 50% sotto, però dipende dall'errore che si può accettare.

Una volta selezionati dei modi propri, si introducono dei coefficienti  $\xi$ , che sono delle coordinate che descrivono qualsiasi configurazione tra quelle ammesse. Diciamo che si passa da un sistema di riferimento a coordinate nodali ad uno a coordinate modali:

$$\bar{x} = \hat{x}_1 \bar{\xi}_1 + \hat{x}_2 \bar{\xi}_2 + \dots + \hat{x}_m \bar{\xi}_m = \hat{X} \bar{\xi}$$

Se si sostituisce nell'equazione discretizzata, si ottiene un sistema sovradeterminato, perché non si considera anche che ci sono delle reazioni vincolari da aggiungere a quell'equilibrio:

$$\hat{X}^T \left( -\omega^2 M + j\omega \underbrace{(\alpha M + \beta K)}_C + K \right) \hat{X} \bar{\xi} = \hat{X}^T \bar{f}$$

Quindi, invece di annullare il residuo, annullo solo la porzione di residuo proiettata entro il sottospazio delle configurazioni possibili, in pratica proietto il residuo su ogni colonna di x, cioè su ogni elemento della base che definisce questo sottospazio e chiedo che il prodotto scalare tra il modo possibile ed il residuo sia nullo,

perché quell'elemento non può essere assorbito dalle reazioni vincolari. Tutto il restante, cioè tutte le n-m forme di residuo vengono assorbite dagli n-m vincoli.

Date le relazioni:

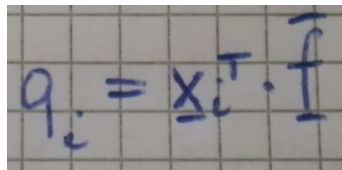
$$\begin{aligned}\hat{x}_j^T M \hat{x}_i &= \delta_{ji} \\ \hat{x}_j^T K \hat{x}_i &= \delta_{ji} \omega_i^2\end{aligned}$$

Sostituendo si ottiene:

$$(-\omega^2 I + j\omega(\alpha I + \beta \Lambda) + \Lambda) \bar{\xi} = \bar{q}$$

Dove sono presenti la matrice identità e la matrice diagonale  $\Lambda$ , che ha per diagonale gli omega quadri degli m modi propri e i restanti termini nulli.

I termini q sono semplicemente definiti come:



A photograph of a handwritten equation on a grid background. The equation is  $q_i = x_i^T \cdot f$ , where  $x_i$  and  $f$  are vectors, and  $q_i$  is a scalar. The handwriting is in blue ink.

Dove  $x$  è l'iesimo modo proprio trasposto e  $f$  è il vettore delle forze esterne.

In pratica è il prodotto scalare tra un modo proprio e la forzante, che non può fornire potenza istante per istante al modo proprio.

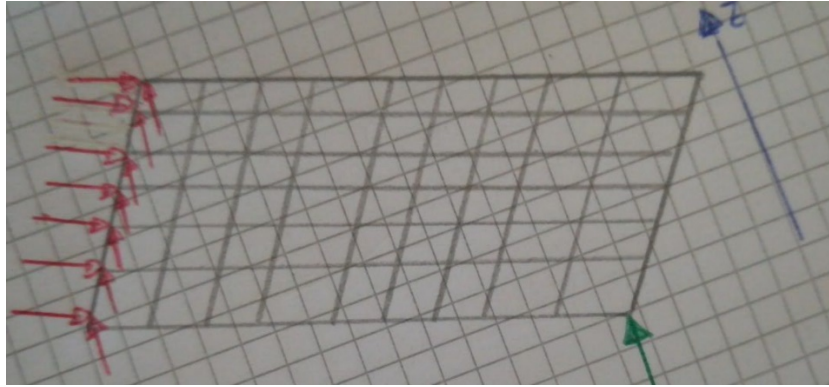
Questo termine è in alcuni casi facilmente calcolabile, ad esempio se si ha un caricamento molto semplice come una lamella incastrata.

L'eccitante è solo una forza applicata ad un solo nodo nella direzione z verticale. Attraverso mentat possiamo vedere i suoi modi propri, in particolare i suoi spostamenti lungo z.

I modi propri che si vanno a vedere sono: il primo modo flessionale fuori piano, il secondo modo flessionale fuori piano, il primo modo torsionale, il secondo modo torsionale, il terzo modo flessionale fuori piano, il primo flessionale entro piano e così via. Questi nomi sono facilmente identificabili nel caso della lamella, nei casi più complessi vengono forniti.

Se guardiamo il primo modo proprio, la lamella ha subito uno spostamento di 862.9 mm verso l'alto.

Dunque, se il carico ad esempio è di  $1.2[N] \times \cos(2\pi ft)$ , il vettore  $f$  è un vettore in funzione di  $z$  e si ricava che il coefficiente  $q$  del primo modo proprio  $q_1 = 862.9 \times 1.2$ .



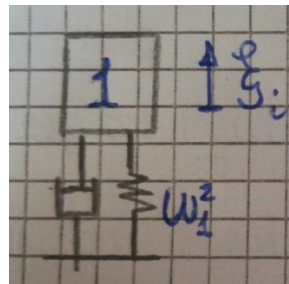
Quindi, quando le forze applicate siano abbastanza semplici, cioè ad esempio non ci siano carichi distribuiti su metà struttura, risulta facile calcolare questi coefficienti di accoppiamento. Stesso discorso è possibile farlo per trovare  $q_2, q_3$ , ecc...

Quindi, tornando al sistema di equazioni sopra scritto e scomponendolo, otteniamo che:

$$\left(-\omega^2 + j\alpha\omega + j\beta\omega\omega_i^2 + \omega_i^2\right) \bar{\xi}_i = \bar{q}_i \quad i = 1 \dots N$$

Che è l'equazione caratteristica di un oscillatore ad 1 gdl  $\xi_i$  ed in pratica è un oscillatore che ha massa unitaria, rigidezza che per il valore specifico di massa unitaria è pari a  $\omega_i^2$  e smorzamento dato da  $2\omega_i\zeta_i$ . (figura sotto)

$$\ddot{\xi}_i + \underbrace{2\omega_i \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\omega_i} + \beta\omega_i \right)}_{\zeta_i} \dot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = \bar{q}_i e^{j\omega t}, \quad \xi_i = \bar{\xi}_i e^{j\omega t}, \quad i = 1 \dots N$$



Quindi il nostro sistema complesso può essere ricondotto ad  $N$  oscillatori semplici, ognuno dei quali eccitato da una forza esterna applicata  $\text{Re}(q_i e^{j\omega t})$ . Questi oscillatori lavorano in maniera indipendente, cioè non interagiscono l'uno con l'altro, ovviamente, appena vi è una non linearità del sistema, non è più vero.

L'equazione è di tipo complesso, quindi la soluzione di un oscillatore armonico ad 1 grado di libertà è:

$$\begin{aligned} \xi_i(t) &= |\bar{\xi}_i| \cos(\omega t + \psi_i - \phi_i) \\ &= \text{Re}(\bar{\xi}_i) \cos \omega t - \text{Im}(\bar{\xi}_i) \sin \omega t \end{aligned}$$

Si definiscono i parametri intermedi:

$$\begin{aligned}
 r_i &= \frac{\omega}{\omega_i} \\
 a_i &= 1 - r_i^2 \\
 b_i &= 2\zeta_i r_i,
 \end{aligned}$$

$\omega$  è la pulsazione dell'eccitante e  $\omega_i$  è la pulsazione dell'iesimo modo proprio.

Seguono:

$$\begin{aligned}
 |\bar{\xi}_i| &= \frac{|\bar{q}_i|}{\omega_i^2} \frac{1}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}} \\
 \text{Re}(\bar{\xi}_i) &= \frac{1}{\omega_i^2} \frac{a_i \text{Re}(\bar{q}_i) + b_i \text{Im}(\bar{q}_i)}{a_i^2 + b_i^2} \\
 \text{Im}(\bar{\xi}_i) &= \frac{1}{\omega_i^2} \frac{a_i \text{Im}(\bar{q}_i) - b_i \text{Re}(\bar{q}_i)}{a_i^2 + b_i^2},
 \end{aligned}$$

Dove abbiamo il modulo dello smorzamento dato dall'ampiezza dell'eccitante diviso la pulsazione dell'iesimo modo proprio (che equivale alla forza applicata diviso la rigidezza nell'oscillatore) moltiplicato un termine di amplificazione dinamica. In risonanza  $a_i$  si annulla, mentre,  $b_i$  non si annulla mai, a parte i modi propri a frequenza nulla. E poi sono presenti la parte reale e la parte immaginaria di  $\xi_i$ .

$$\psi_i = \arg(\bar{q}_i) = \arg(\hat{x}_i^T \bar{f})$$

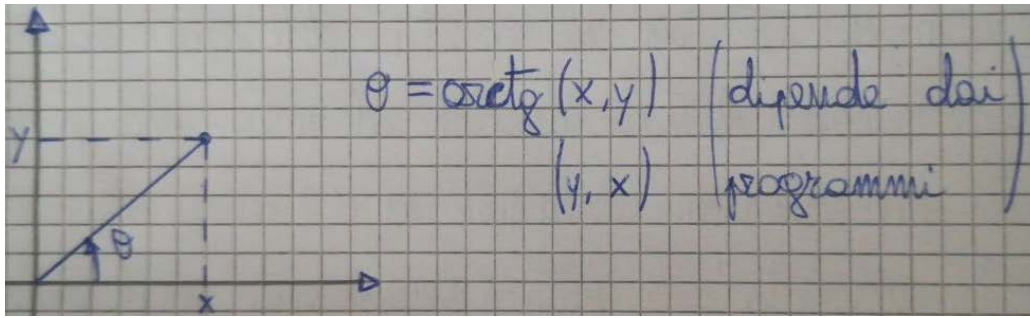
E' la fase della forzante dello specifico modo proprio, mentre:

$$\phi_i = \arg(a_i + jb_i)$$

È il ritardo tra la risposta del sistema e l'eccitante stessa.

La funzione fase  $\arg$  è definita come:

$$\arg(x + jy) = \text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & y < 0 \end{cases}$$



Quindi, non si ha bisogno di fare un calcolo di risposta in frequenza nell'esempio della lamella, perché si riesce facilmente a calcolare i  $q_i$  per ogni modo sulla base degli spostamenti.

Allora, con l'analisi modale si riesce a ricavare le frequenze proprie e gli spostamenti del grado di libertà caricato secondo i modi propri normalizzati a massa nodale unitaria. Grazie ai  $q_i$  si ricava l'ampiezza delle oscillazioni in funzione della frequenza dell'eccitante.

In realtà, si potrebbe evitare di fare l'analisi in risposta in frequenza quando lo smorzamento è proporzionale, perché basta una modale ed un foglio excell.

Sapendo che l'iesimo modo della struttura deve essere modulato o amplificato nel tempo secondo  $\xi_i$  e così tutti gli altri modi si modulano rispetto al tempo, si sommano per ottenere il modo finale della struttura.

Di fatto se si utilizza la risposta in frequenza per sovrapposizione modale l'unico passo "costoso" è l'estrazione dei modi propri, da lì in poi è solo un post processing dell'elaborazione dei risultati.

Infatti, in alcuni codici, non in Mark, ma nei codici che assumono una forma proporzionale della matrice di smorzamento si calcola solo la modale per avere la risposta e poi si ricavano i risultati utilizzando le formule scritte.

Tornando ora al caso della molla, eravamo rimasti a dare la risposta in frequenza in assenza di smorzamento e avevamo visto che c'era un'ampiezza di oscillazione infinita in corrispondenza dei modi propri primo, secondo e terzo. Chiaramente, il modo proprio successivo oltre al range scelto non ha influenza. Si nota come nell'intorno di ogni risonanza, questo è previsto dalla teoria, un modo proprio è amplificato di una data ampiezza molto più elevata di tutti gli altri e sommando tutti i contributi, quel modo proprio diventa dominante sugli altri, per cui è piuttosto normale che in corrispondenza di una linea di risonanza la struttura acquisti una forma di oscillazione che di fatto sia identica dell'associato modo proprio risonante.

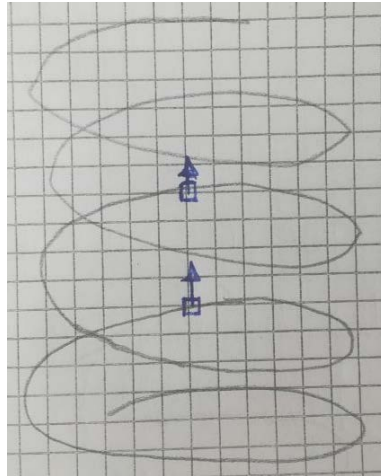
Allora, abbiamo visto che la risposta in frequenza ci da informazioni di ampiezza di oscillazione sotto forzante e con frequenza qualunque eccetto quella di risonanza, che tende all'infinito; qualunque modo proprio, anche quello più semplice, vicino alla frequenza di risonanza ha delle ampiezze infinite.

Nel caso della molla appare necessario applicare un filtro alle risonanze sui modi propri che risultano meno eccitabili per la specifica forzante e questo filtro di base è inserire un piccolo smorzamento, cioè il minimo possibile per il tipo di struttura.

Ad esempio, in questo caso si può prendere  $5 \times 10^4$  come proprietà dell'acciaio di per sé, se però si considerano pure dei contatti all'interfaccia inferiore e superiore, si può prendere ragionevolmente l'1% dello smorzamento critico e aggiungerlo alla molla per vedere se quei picchi infiniti di risposta in corrispondenza di ogni risonanza risultano effettivamente elevati, anche se non infiniti, e per vedere qual è l'altezza specifica.

È possibile fare un confronto con smorzamento nullo e con un certo valore.

Si considera un nodo in mezzeria significativo, si considera lo spostamento in z di esso e, considerando lo spostamento di un nodo nella spira sottostante, si testa il problema dell'autocontatto andando a vedere lo spostamento relativo fra i due. Per vedere se quella vibrazione indotta con la risposta dinamica crea l'autocontatto tra le spire di questa molla, si vanno a prendere gli spostamenti verticali dei due nodi e si fa la differenza; in realtà si dovrebbe fare per ogni coppia di nodi essenzialmente per controllare questo autocontatto.



Si procede descrivendo una curva data dalle differenze dei due spostamenti e si vede se sarà inferiore in modulo dei 3mm di gioco che ci sono per evitare l'autocontatto, a cui bisogna sottrarre lo spostamento dato dal precarico, perché i 3mm sono dati dall'indefornata e una volta precaricata si riduce.

Una volta fatto il caso senza smorzamento, si procede inserendo uno smorzamento. Si pone uno smorzamento a frazione del critico piccolo, in particolare si vuole uno  $\xi=0.01$  per ogni frequenza ovvero per ogni modo. Se il codice lavorasse sulla posizione modale si avrebbe 0.01 come smorzamento di ogni modo, purtroppo Marc non lavora per sovrapposizione modale, ma lavora risolvendo l'equazione iniziale e non chiede una matrice smorzamento in forma di Rayleigh, per cui si vuole inserire nella struttura uno smorzamento pari a quello scalare e bisogna vedere come procede il programma.

I software come Marc tendono a inserire lo smorzamento come proprietà del materiale, quindi si va su MATERIAL PROPERTIES, avendo un materiale ideale quindi si fa NEW: STRUCTURAL ed è possibile inserire uno smorzamento proprio del materiale stesso, cioè uno smorzamento strutturale. Si può attivare per lo specifico materiale la proprietà di DAMPING, ciò si può fare per qualsiasi materiale basta avere dei componenti in gomma nel modello ad alto smorzamento attivato, mentre i componenti in acciaio con smorzamento nullo disattivato.

E' possibile fare un'altra cosa, cioè si può andare nel menù LINKS: SPRINGS&DASHPOTS che sono rispettivamente molle e smorzatori, è sufficiente inserire un dashpot tra due nodi con ampi coefficienti dati da valori coerenti e poi collegare questo smorzatore a far ponte tra un nodo ed un altro nella direzione della congiungente. Quest'ultimo modo funziona anche nel caso non lineare.

È possibile mettere sia degli smorzatori concentrati, sia degli smorzamenti distribuiti e quindi inserire i valori  $\alpha$  e  $\beta$ .

In realtà si vuole approfondire il valore cumulativo  $\xi_i$ , cioè non interessa un valore specifico di  $\alpha$  e di  $\beta$ . Si può pensare di fare questo: si pone  $\alpha=0$ , perché non si vuole dissipazione su eventuali moti di corpo rigido, che in questo caso sono vietati dai vincoli, cioè non voglio uno smorzamento strutturale, se fosse diverso da 0 ci sarebbero degli smorzatori che fanno da ponte dai punti del materiale e terra e  $\beta$  deve essere tale che lo  $\xi$  risultante deve essere pari a 0.01.

$$\beta = \frac{1}{\pi f} \cdot \xi \quad \text{con } d=0$$

↓  
frequenza

Ciò si può dimostrare perché partendo da:

$$\zeta_i = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\omega_i} + \beta \omega_i \right)$$

$$\xi = \frac{1}{2} \cdot (\phi + 2\pi f \beta) = \pi f \beta$$

Si vede che  $\beta$  è in funzione della frequenza, quindi si deve creare una table per modulare bene la  $\beta$ .

Ci sono codici che permettono di introdurre direttamente  $\xi$ , mentre su Marc bisogna procedere come fatto sopra.

I parametri di Rayleigh se si mettono uguali per tutti i materiali, se si ha un sistema monomateriale e si mette solo su damping, mentre se si ha un sistema multimateriale bisogna mettere i parametri di damping uguali per tutti i materiali, perché potrebbero essere elementi meno smorzati ed altri più smorzati.

Allora, su MENTAT mettiamo come valore di mass matrix 0, che sarebbe  $\alpha$ , mentre, come valore di stiffness matrix, che sarebbe  $\beta$ , si mette il valore di  $\xi$  voluto e si crea una table con  $1/(\pi f)$  che si moltiplica con il valore inserito. Ovviamente, non si campiona a 0 Hz, piuttosto si farebbe un'analisi statica.

Quindi una volta definito lo smorzamento, si crea un nuovo JOB e si copia come gemello della risposta in frequenza creata la lezione precedente e lo chiameremo *risposta smorzata* (utilizzando copy su MENTAT si copia il JOB identico e si modifica solo il grado di smorzamento nelle proprietà). Andiamo su ANALYSIS OPTIONS (dentro le PROPERTIES) e all'interno c'è DYNAMIC HARMONIC e si attiva COMPLEX DAMPING, che attiva la natura complessa dello smorzamento. Diciamo che è una seconda conferma che diamo al codice dopo quello fatto su MATERIAL PROPERTIES. A questo punto la risposta sarà data in modulo e fase e non solo modulo e segno, che permette di switchare da risposta in fase più qualcosa a risposta in controfase meno qualcosa. Andiamo su JOB RESULTS e disattiviamo tutto, perché c'è qualcosa da attenzionare.

In Marc se si mette stress non esce nulla di interessante così per ogni quantità perché da qualche parte c'è sempre *real harmonic stress* e *imaginary harmonic stress* (che sono divise in due) da attivare per le risposte in frequenza con smorzamento. Si può dunque procedere al calcolo.

Nei risultati si può analizzare la deformata partendo dai 0° fino a 360°. A 270° si vede la parte immaginaria.

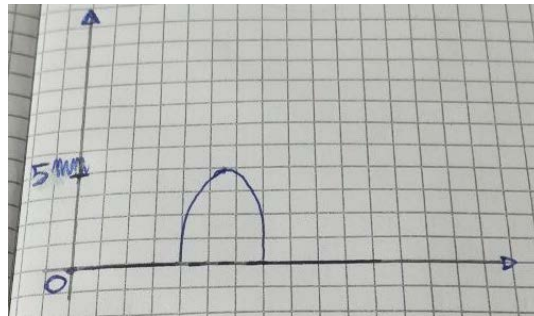
La parte immaginaria serve per vedere la deformata alle frequenze di risonanza. Si nota subito che con il piccolo smorzamento inserito si ha una risposta finita.

Per verificare quanto detto si ricrea il grafico degli spostamenti selezionando gli stessi nodi presi sopra.

Sovrapponendo i due grafici si nota che nella risposta non smorzata si ha un picco legato al moto torsionale, che svanisce o quasi nella risposta smorzata. Nella risonanza assiale, cioè dove gli estremi stanno fermi e si muove la zona mediana, anche la risposta smorzata vede delle grosse ampiezze di oscillazione, dunque, si avrà un problema di autocontatto con il valore minimo di smorzamento inserito.



Per evitare tale problema in primo luogo si cerca di non arrivare a quella frequenza, in secondo luogo si corregge la frequenza propria portandola fuori dal range operativo di rotazione di quella camma, ciò non è per niente facile perché prendendo la legge di una camma: ci sarà una posizione 0, un momento di apertura, un picco e poi una chiusura a 0.



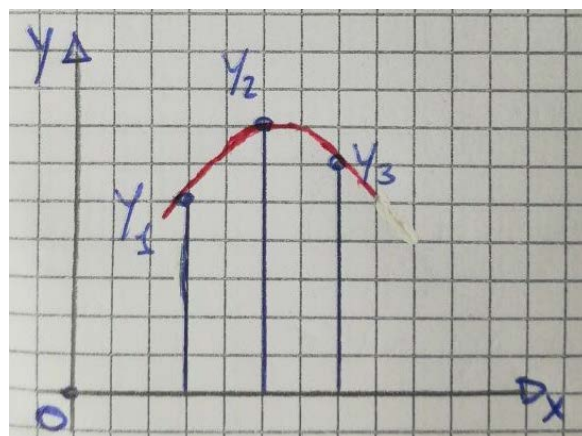
Questo oggetto è definito come la somma di una media statica più una prima, una seconda, una terza, una quarta, ecc... armoniche, ma prima o poi bisogna finire. Allora, quella è la risposta ad una oscillazione del piattello unitaria, bisogna scomporre l'oscillazione in serie di Fourier (supponiamo sia di 5mm) e si deve vedere che, se andando su e giù di 1 mm e dando un'amplificazione per 8 dello spostamento, non si abbia autocontatto. 1mm si può associare a qualsiasi armonica in quel range.

Quindi, in teoria non si riuscirà mai a portare una frequenza di risonanza aldilà della quarta armonica della serie di Fourier, perché la serie di Fourier è infinita, allora, porto la risonanza al livello superiore, cioè all'armonica più alta oppure si parte da un segnale pulito, perché se il segnale parte "sporco" la serie di Fourier non è limitata.

Per rilevare il picco di risposta in frequenza a partire da un campionamento equi spaziatto si usa questa formula:

$$Y_{max} = \frac{+16Y_2^2 + Y_1^2 + Y_3^2 - 8Y_1Y_2 - 8Y_2Y_3 - 2Y_1Y_3}{16Y_2 - 8(Y_1 + Y_3)}$$

Dove  $y_1, y_2, y_3$  sono i tre campionamenti successivi equi spaziatto ed in particolare in questo caso  $y_2$  è il valore massimo campionato.



Quindi, quella formula risulta creando la parabola interpolante. Sostituendo i valori, si trova il valore di picco.

Se si dimezza lo smorzamento che si è imposto, un eventuale picco, ovviamente, raddoppia.