

Lezione martedì 15 maggio 2018

Troviamo il materiale relativo alla lezione odierna ai seguenti link:

https://cdm.ing.unimo.it/dokuwiki/media/wikitelaio2016/mia_dispensa_dinamica_updated.pdf

Lo scopo è risolvere un'equazione non lineare raffinando una soluzione di primo tentativo ovvero portare a convergenza il metodo di Newton-Raphson.

Partendo da soluzione U^i , nota una funzione residuo (da annullare) e la matrice Jacobiana della stessa ho un iterato che vale:

$$\underline{U}^{i+1} = \underline{U}^i + \underline{J}^i \underline{r}(\underline{U}^i).$$

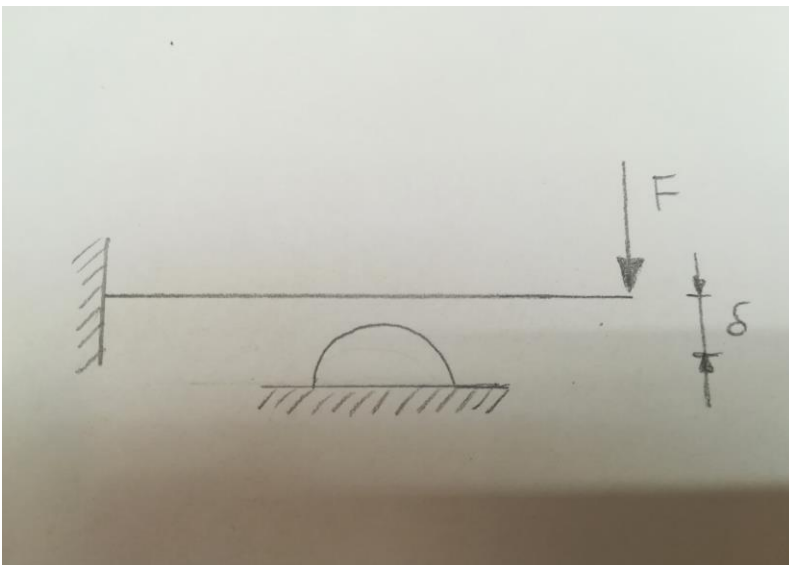
con $\underline{J}^i \underline{r}(\underline{U}^i)$ termine correttivo dato dalla soluzione del sistema lineare che ha come matrice la Jacobiana calcolata con spostamenti e carichi definiti dalla configurazione U^i .

Viene pertanto definito un sistema lineare di matrice J_r e un termine noto dato dal residuo allo stato i -esimo; risolvendo l'equazione ottengo l'iterato successivo.

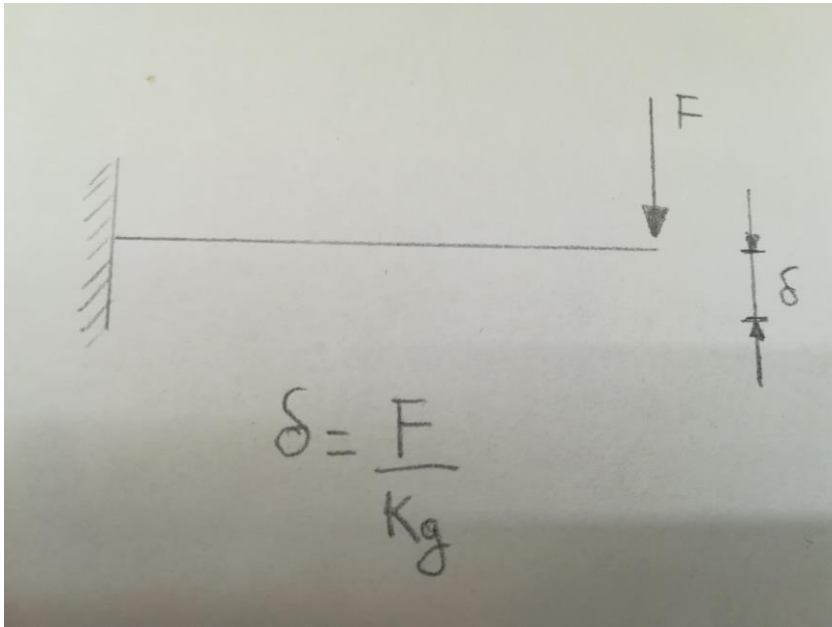
Ripeto questo procedimento finchè non si ha un iterato stabile o almeno un residuo sufficientemente basso; esiste infatti un iterato tale per cui posso dire che un certo U^{i+1} è sufficientemente preciso e dal quale posso ricavare una soluzione soddisfacente.

Se la procedura non converge devo cercare di raffinare il più possibile il modello costruito con Newton-Raphson affinché riesca a trovare dei risultati.

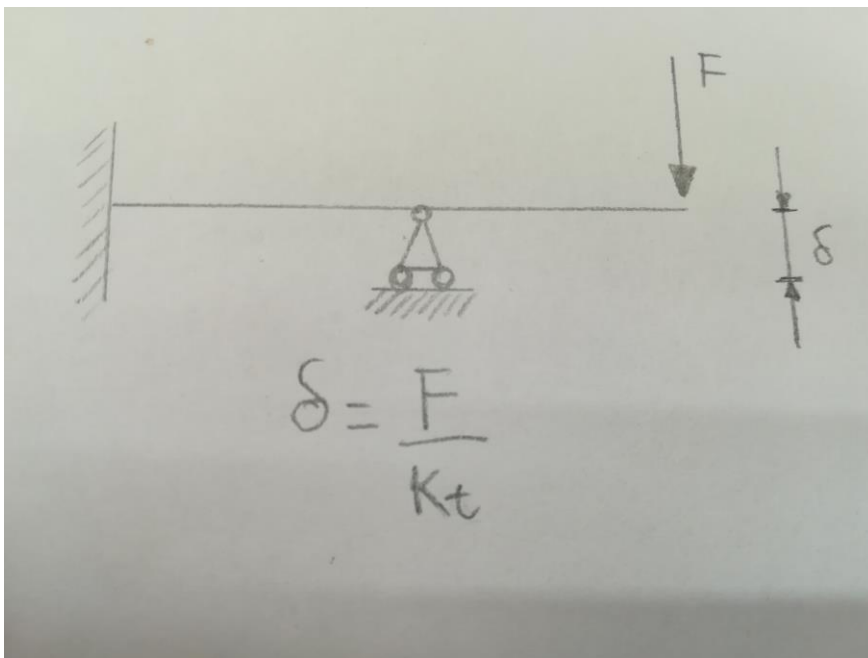
Prendo il caso della trave a sbalzo caricata da una forza F con appoggio in mezzzeria e monitoro lo spostamento δ sotto tale forza.



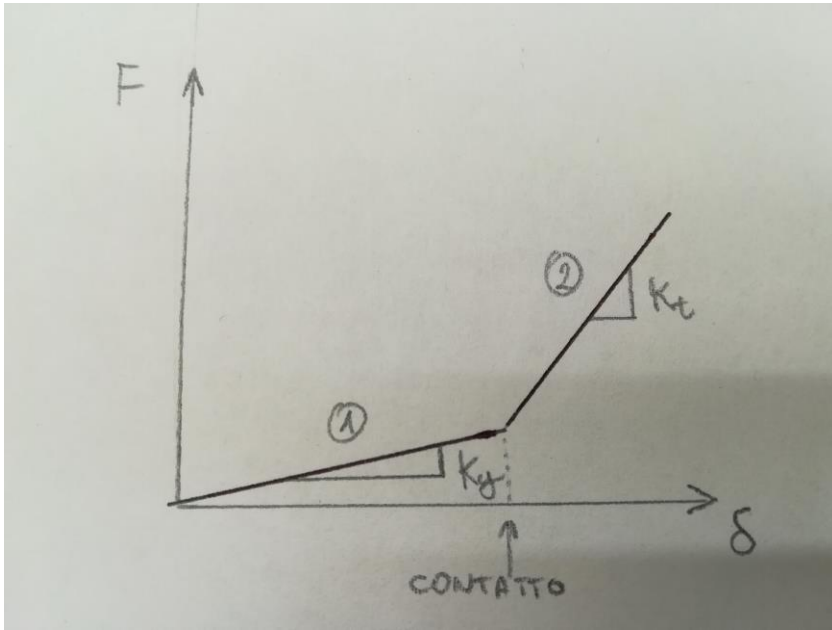
Inizialmente la trave non tocca l' appoggio. In seguito all' azione della forza avverrà il contatto.



Il primo tratto ha pendenza corrispondente a quello di una trave senza appoggio (caso lineare).



Il secondo tratto ha inizio in corrispondenza di un carico ed uno spostamento tali per cui la trave tocca l'appoggio (caso non lineare).



La K_t sarà ovviamente superiore alla K_g quindi nel grafico la curva corrispondente avrà pendenza maggiore ed in generale vale:

$$k = \frac{\partial F}{\partial \delta}$$

Lo Jacobiano del residuo è dato dallo Jacobiano delle reazioni elastiche e dallo Jacobiano della variazione di carico; nel caso in cui il carico imposto fosse fisso ovviamente lo Jacobiano del residuo coinciderebbe con lo Jacobiano delle reazioni elastiche.

Nell'intorno del punto di transizione lo Jacobiano non è definito univocamente perchè si hanno due tangenti; avrò quindi una matrice jacobiana discontinua che non è accettabile per il metodo N-R.

Come posso portare a convergenza N-R?

Il metodo più semplice è quello di dare una soluzione di primo tentativo il più possibile vicina a quella desiderata. Si prenda ad esempio il seguente motore:

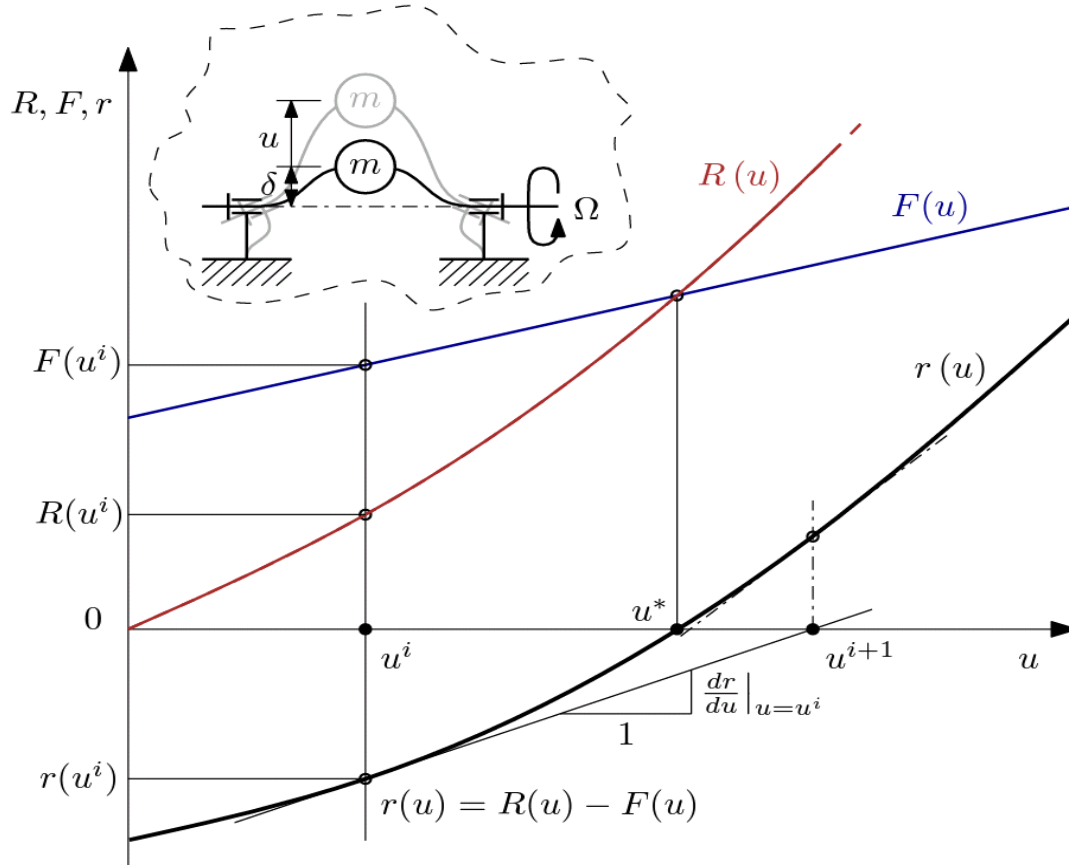
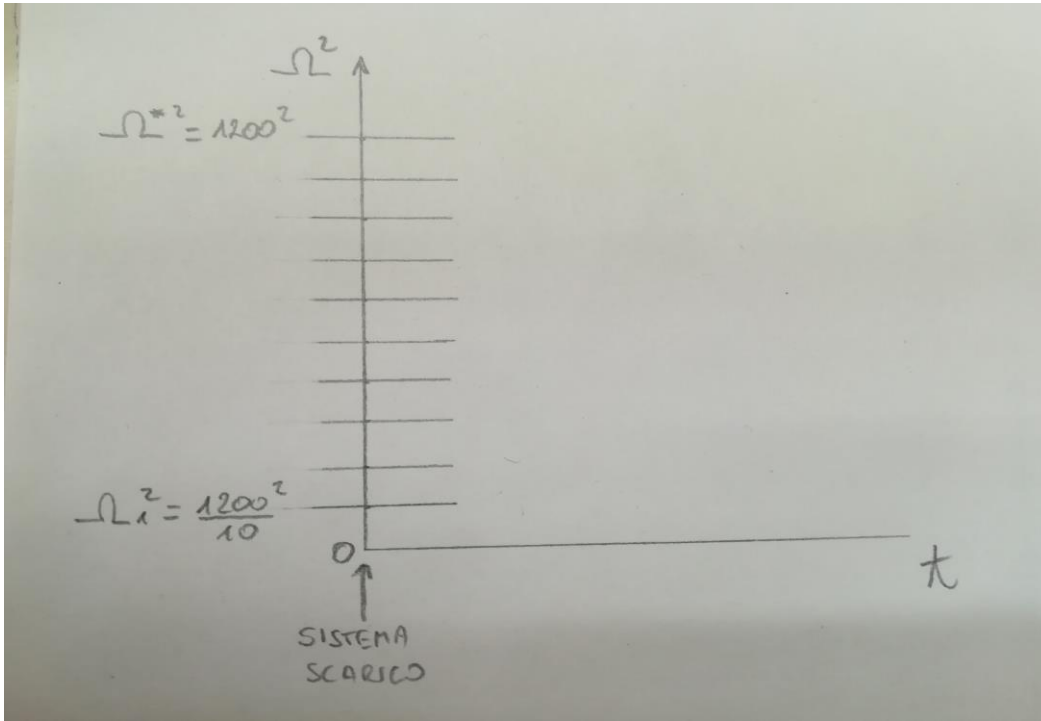


Figure 2: Costruzione grafica per l'iterato N-R, caso N=1

Supponiamo di avere una $\Omega = 1200 \text{ rad/s} = 1200 \cdot 60/2\pi \text{ rpm}$

La configurazione di primo tentativo sulla quale ho più certezze è quella di sistema scarico ovvero a $\Omega = 0$ e $t = 0$.

Solitamente si imposta un asse temporale fittizio che rappresenta una sequenza di istanti (non un continuo).



Faccio il grafico con in ordinata Ω^2 perchè i carichi crescono linearmente con essa.

Volendo arrivare a quota $\Omega^2 = 1200 \text{ rad/s}$, ma non potendo raggiungere l'approssimazione desiderata con un singolo passaggio, definisco dei livelli di carico intermedi.

Divido il mio intervallo per esempio in 10 parti, quindi al primo livello avrò $\Omega^2 = 1200/10$; a questo punto uso N-R: attraverso Ω^2 calcolo le forze esterne e mediante queste trovo il residuo.

Parto da una soluzione iniziale esatta (sistema scarico), da questa mi calcolo la soluzione di primo livello e ripeto il procedimento fino ad arrivare a convergenza per il livello di carico 1; a questo punto so come si deforma la struttura al livello 1.

$\underline{U}_0^* \text{-----} > \underline{U}_1^1$ (dove l'apice indica l'iterato corrente e il pedice l'incremento ovvero il livello di carico)
 Dopodichè applico N-R e ricavo prima \underline{U}_1^2 , poi tramite quest'ultima trovo \underline{U}_1^3 e così via fino a ricavare \underline{U}_1^* ovvero il valore esatto.

Nel caso in cui N-R non dovesse fornire soluzione nel passaggio da un livello di carico al successivo, dato che il sistema non cambia, si ha una instabilità che, nel caso del rotore, è una velocità critica. Questo metodo oltre a far convergere N-R mi aiuta a monitorare la situazione del sistema e trovare per esempio le velocità critiche.

Più inserisco livelli di carico intermedi e più la distanza fra il livello per il quale sto cercando la soluzione e quello precedente sarà minore, quindi il risultato sarà più preciso.

Se la configurazione \underline{U}^{j+1} è più vicina della \underline{U}^j alla soluzione \underline{U}^* , allora ciò è sintomo del fatto che il metodo sta convergendo al risultato cercato. Non è tuttavia possibile conoscere a priori se il metodo

convergerà o meno alla soluzione.

Rappresentazione grafica del metodo Newton-Rapson

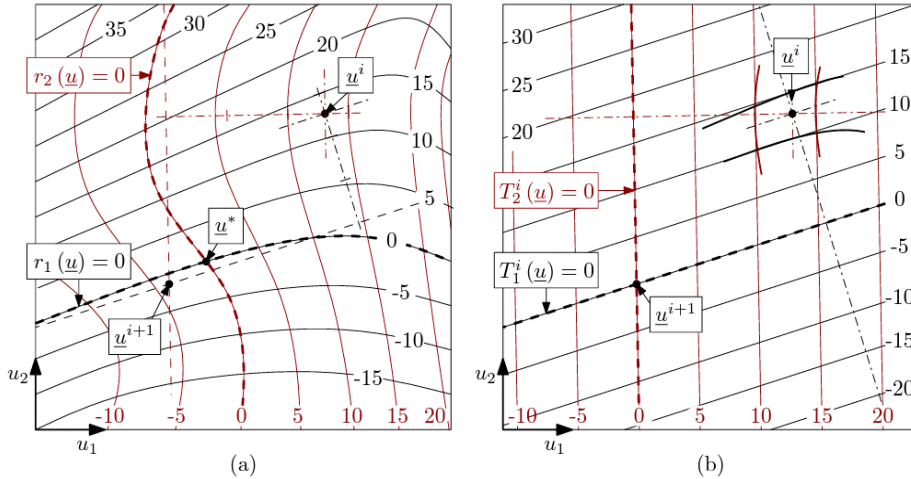


Figure 3: Costruzione grafica per l'iterato N-R, caso N=2

In questo caso ho il residuo formato da due componenti ed entrambe devono valere 0

$$\begin{cases} r_1(U_1, U_2) = 0 \\ r_2(U_1, U_2) = 0 \end{cases}$$

In forma compatta:

$$\mathbf{r}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$$

Queste sono funzioni da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R} quindi sono rappresentabili come curve di livello

Le curve in nero rappresentano le curve di livello di r_1

Le curve in rosso rappresentano le curve di livello di r_2

Si ha la soluzione esatta quando si intersecano le curve che annullano la prima e la seconda equazione.

Conoscendo l'iterato di partenza, vado a linearizzare nell'intorno delle due superfici ovvero estraggo i piani tangenti alle curve di livello e con questi vado a costruire le curve di isolivello.

Una volta che conosco le curve di isolivello posso identificare il luogo dei punti per cui il piano tangente è uguale a zero (ovvero una retta).

Ripeto il procedimento per la prima e la seconda componente del residuo e dall' intersezione delle due rette ho la soluzione del problema linearizzato che verrà assunta come iterato successivo U^{i+1} .

Risposta dinamica di strutture elastiche: forme periodiche

L'equazione di equilibrio del sistema elastico, relativo ai vari gradi di libertà si presenta nella seguente forma generica

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F(t), \quad x = x(t) \quad (Eq. 1)$$

Dove:

- M è la matrice di massa, simmetrica e definita positiva;
- $M\ddot{x}$ sono le forze che devono essere applicate dall'esterno sulla struttura per mantenere le masse della struttura in quella configurazione di accelerazione uniforme, cioè costante nel tempo, descritta da \ddot{x} ;
- C è la matrice di smorzamento viscoso, simmetrica e semidefinita positiva;
- $C\dot{x}$ sono le forze che devono essere applicate dall'esterno sulla struttura per mantenere lo scorrimento di questi smorzatori viscosi a velocità costante descritta da \dot{x} ;
- K è la matrice di rigidità, simmetrica e semidefinita positiva: tale matrice può essere a termini complessi se si include una quota di smorzamento strutturale;
- $F(t)$ è il vettore delle forze nodali applicate dall'esterno, il cui scopo risiede nel mantenere il sistema nella configurazione deformata descritta dal vettore dei gradi di libertà x ;
- $x(t)$ è la risposta nel tempo del sistema.

Ci sarà equilibrio quando le forze che bilanciano le azioni elastiche (Kx), le azioni viscosse ($C\dot{x}$) e le azioni inerziali ($M\ddot{x}$), sono uguali alle forze che vengono applicate dall'esterno. Il tutto deve valere istante per istante, poiché la configurazione del sistema è espressamente ($x = x(t)$) ovvero dipendente dal tempo.

In primis, restringiamo il campo di risoluzione del problema e si ricerchino solamente soluzioni periodiche del problema, ovvero risposte a regime in seguito a sollecitazioni di natura periodica.

Esistono anche sistemi che sollecitati da ingressi periodici, a regime non hanno un comportamento lineare. È il caso dei sistemi caotici, infatti nessun sistema che dà luogo a risposte caotiche ha un comportamento lineare. Ad esempio un sistema ad impulso periodico (se lineare) avrà una risposta data dalla sovrapposizione degli effetti di due soluzioni: una che decade nel tempo più una periodica che non decade nel tempo. La linearità quindi preclude il proseguimento del problema; se non ho linearità non posso determinare tramite la sovrapposizione degli effetti delle singole soluzioni. Nessuno mi

garantisce che ad ingressi periodici ci siano risposte periodiche.

Un esempio pratico di sistema non lineare è il seguente: prendiamo un righello appoggiato su un piano ed esercitiamo una forza alla sua estremità; a seconda di dove viene vincolato questo oggetto, il sistema presenterà una rigidezza k differente. Ovviamente un sistema che cambia rigidezza durante il suo moto sicuramente non è lineare, poiché come detto precedentemente a sollecitazione periodiche deve necessariamente seguire delle risposte periodiche in un sistema lineare. Non è questo il caso poiché il sistema risponde in modo caotico ad un impulso periodico.

Ritornando al problema periodico, si procede ad una scomposizione della forzante nelle sue singole armoniche (in ipotesi di linearità potrà poi ricomporre le risposte), in termini nella forma:

$$F(t) = \bar{f}e^{j\omega t}$$

Ricordiamo che in tal modo si definisce una forma complessa dell'eccitante, la cui parte reale

$$Re(\bar{f}e^{j\omega t}) = Re(\bar{f}) \cos \omega t - Im(\bar{f}) \sin \omega t$$

è la quota “fisicamente” applicata ai nodi nel tempo. Tale formalismo non è rigoroso ma è efficace, e in quanto tale risulta comunemente utilizzato. Eventuali differenze di fase tra le eccitazioni trasmesse ai nodi sono definite dai termini complessi del vettore \bar{f} . Omettendo i fenomeni di transitorio, si sostituisce dentro l'equazione di equilibrio del sistema elastico (Eq. 1) il valore:

$$x(t) = \bar{x}e^{j\omega t}$$

la cui quota reale rappresenta l'effettivo spostamento nodale nel tempo. Si procede quindi alla scrittura della forma:

$$(-\omega^2 M + j\omega C + K)\bar{x}e^{j\omega t} = \bar{f}e^{j\omega t}$$

che, dovendo valere per ogni t ($\forall t$), implica che:

$$(-\omega^2 M + j\omega C + K)\bar{x} = \bar{f}$$

ossia la soluzione di un sistema lineare a matrice e termine noto complessi, con matrice di sistema variabile in ω . In particolare si nota che se il contributo dei termini di rigidezza è costante, il contributo dei termini viscosi e della matrice di massa cresce con ω e ω^2 rispettivamente.

Analisi modale

Si vanno a ricercare i modi propri della struttura, ossia quei particolari moti periodici che sono ammessi dall'equazione di equilibrio del sistema elastico (Eq.1) anche in assenza di forzante applicata. Condizione necessaria affinché un moto possa perdurare in assenza di forzanti è l'assenza di dissipazione entro il sistema, per cui è necessario porre $C = 0$ nonché K reale, riducendoci alla forma algebrica:

$$(-\omega^2 M + K)\bar{x} = 0$$

Le soluzioni non nulle di tale forma sono le coppie autovalore, autovettore (ω_i^2, \bar{x}_i) del problema agli autovettori generalizzato

$$(K - \omega^2 M)\bar{x} = 0$$

ovvero, essendo M definita positiva e volendo ricondursi ad un problema agli autovalori standard risulta che:

$$(M^{-1}K - \omega^2 I)\bar{x} = 0$$

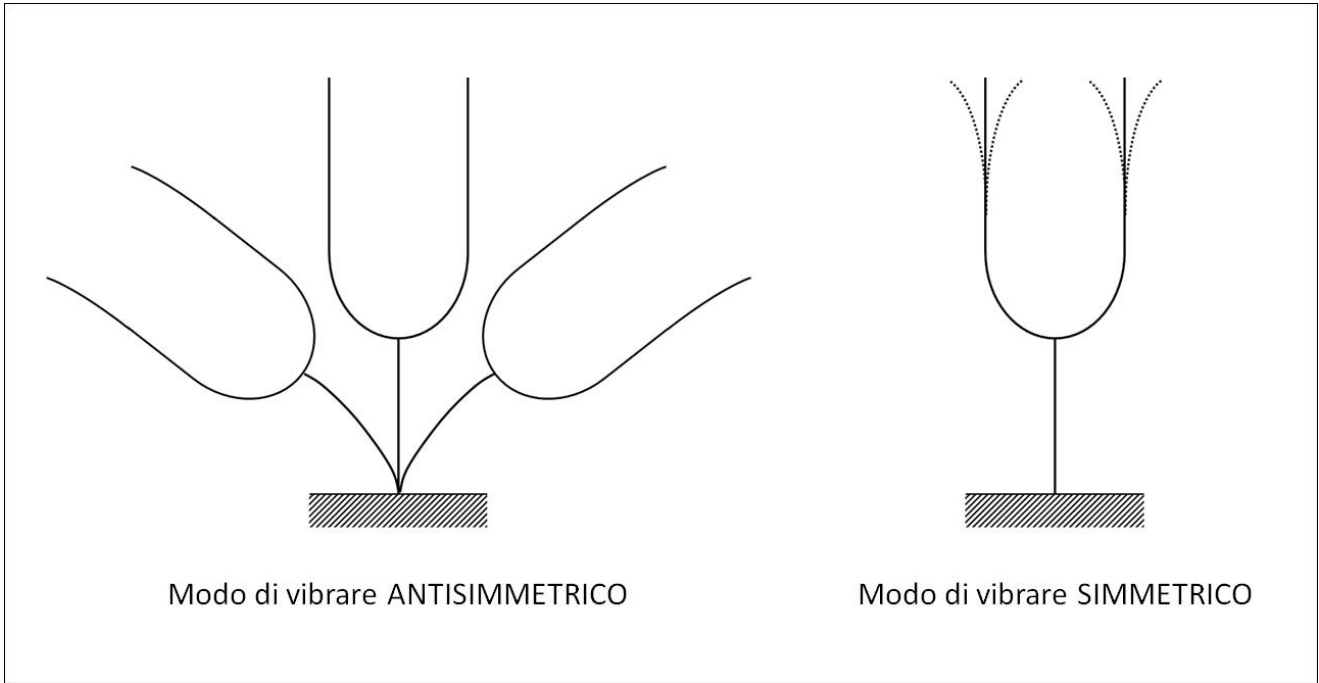
Si nota in particolare che i valori ω_i^2 per cui esistono soluzioni non banali del problema sono definiti come le radici del polinomio

$$\det(K - \omega_i^2 M) = 0$$

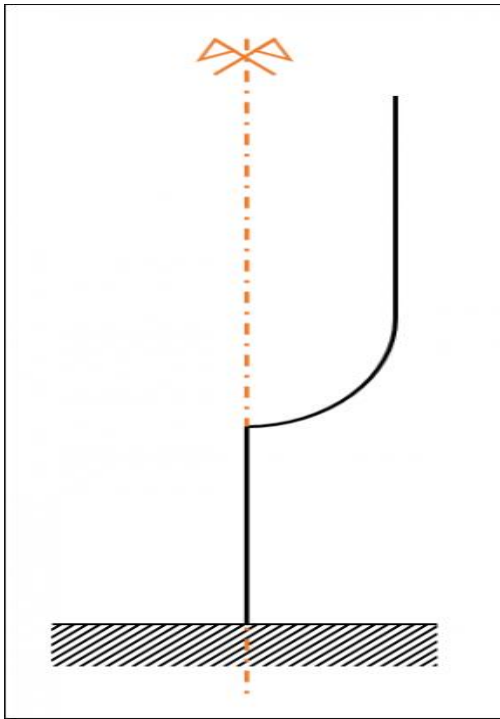
La coppia (ω_i^2, \bar{x}_i) rappresentano pulsazione e forma del modo proprio i -esimo; ricordando che l'autovettore è definito a meno di una costante moltiplicativa arbitraria, non hanno senso considerazioni basate sull'ampiezza in modulo dello stesso, frutto di una normalizzazione.

MODI VIBRAZIONALI DI UNA STRUTTURA SIMMETRICA: DIAPASON

Si prendano come esempio i modi di vibrare di un diapason e di tenere questo fra le dita (vincolo ad incastro); essendo esso una struttura continua, possiederà infiniti modi propri. Ne verranno analizzati specificatamente uno simmetrico e uno antisimmetrico: il primo si verifica quando si ha apertura/chiusura dei bracci, il secondo quando questo vibra attorno all'incastro di base.



Esiste inoltre un piano passante per la mezziera del corpo del diapason rispetto al quale nel primo caso il modo è simmetrico e nel secondo antisimmetrico.

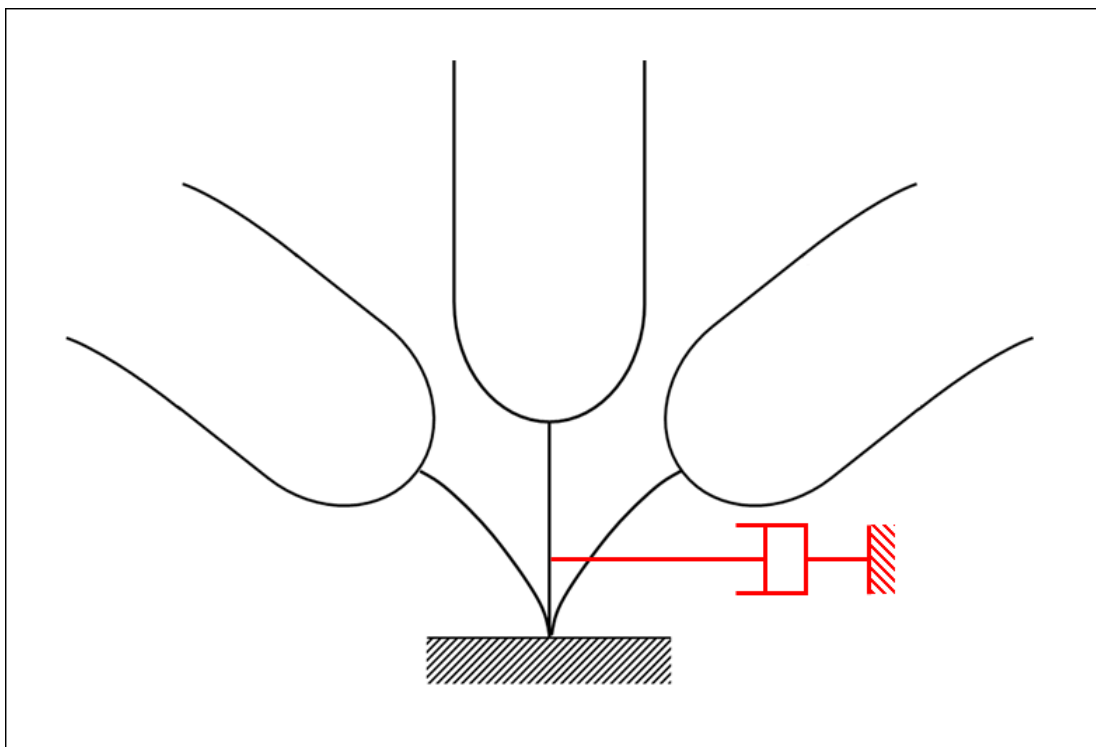


CASO 1: MODO SIMMETRICO

Tenendo il diapason fra le dita ed immaginando lo smorzatore applicato al copro del diapason, siccome i nodi su cui lo smorzatore agisce non si muovono, quest'ultimo non lavora e non viene dissipata energia. I due bracci continuano a vibrare ad una frequenza nel campo dell'udibile di 440 Hz corrispondente ad un "LA".

CASO 2: MODO ANTISIMMETRICO

Immagiamo lo smorzatore applicato sempre nella medesima posizione del caso precedente; in questo caso esso però agirà su nodi mobili e quindi dissiperà energia facendo vibrare il diapason a frequenze inferiori (e quindi fuori dal campo dell'udibile). Essendo inoltre le dita composte in buona percentuale da liquidi, esse dissiperanno energia vibrazionale molto più velocemente di corpo interamente solido; pertanto le dita sono in questo caso un ottimo esempio di smorzatore viscoso (dumper).



L'ampiezza della risposta in risonanza è data dal rapporto fra l'accoppiamento della forzante col modo proprio e l'accoppiamento dello smorzamento col modo proprio. Entrambi possono essere nulli in casi particolari; si ha che il numeratore è uguale a 0 se si hanno forzanti simmetriche applicate a modi antisimmetrici. In questo caso è impossibile portare in risonanza il modo proprio con questo tipo di eccitante; anche se esso lavorasse alla stessa frequenza il denominatore sarebbe nullo dato che la matrice C sarebbe comunque nulla. Il denominatore esprime infatti la capacità del sistema di dissipare energia.

