

1 Calcolo delle tensioni risultanti dovute al taglio in una generica sezione

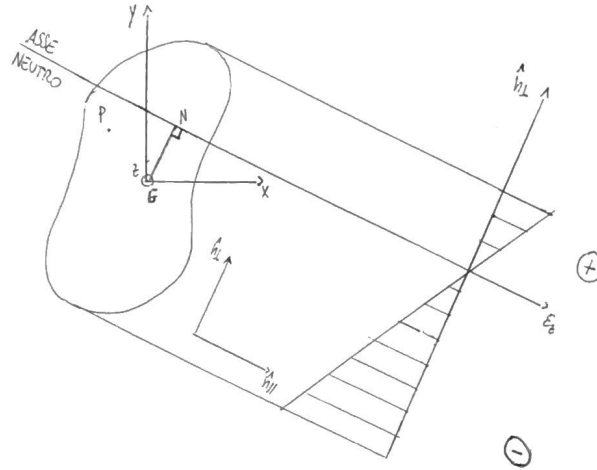


Figura 1

Data la sezione in figura e individuato un sistema di riferimento $Gxyz$, si nota che l'asse neutro non è baricentrico in presenza di sforzo normale. Ciò si evince da

$$(x_N, y_N) = \left(\frac{\bar{\epsilon} \rho_x^2 \rho_y}{\rho_x^2 + \rho_y^2}, -\frac{\bar{\epsilon} \rho_x \rho_y^2}{\rho_x^2 + \rho_y^2} \right) \quad (1)$$

in cui $\bar{\epsilon} \neq 0$ nel caso trattato.

Definita la posizione di N si traccia il segmento di minima distanza da G e ortogonalmente ad esso, si sviluppa l'asse neutro. Inoltre si definisce una coppia di versori n_{\parallel} e n_{\perp} rispettivamente parallelo e perpendicolare all'asse neutro, orientando il secondo verso la zona trattiva.

È possibile ora tracciare la farfalla delle deformazioni ϵ_z , di più facile lettura rispetto a quella delle tensioni, da cui si nota l'andamento lineare in x e y che si annulla in corrispondenza dell'asse neutro.

Si può ottenere infine il corrispondente andamento delle σ_z scalando opportunamente il grafico precedente con il modulo di elasticità E_z , ricordando che questo varia istericamente in caso di sezione multimateriale.

In applicazioni particolari, ad esempio nei materiali fragili utilizzati in costruzione di opere civili quali cementi, calcestruzzo, ecc., è richiesto che la ϵ critica trattiva sia nulla e che la sezione lavori unicamente a compressione. Pertanto in caso di momento flettente, è necessario imporre un sufficiente

sforzo normale compressivo per garantire che l'asse neutro esca dalla sezione o al limite la lambisca. L'analisi è fattibile attraverso il metodo grafico appena trattato.

2 Introduzione degli assi principali d'inerzia

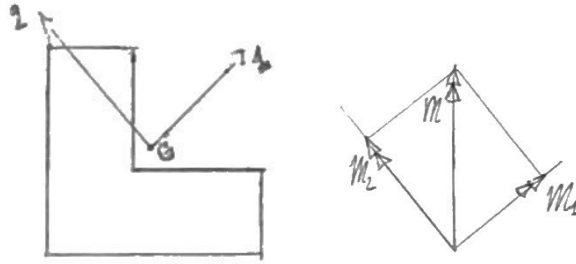


Figura 2

Una scelta conveniente per il posizionamento del sistema di riferimento $Gxyz$ consiste nel prendere gli assi coincidenti con gli assi principali d'inerzia. Per sezioni assialsimmetriche tali assi coincidono con gli assi di simmetria, in caso contrario è necessario svolgere passaggi algebrici per individuarne l'orientamento.

Questa scelta comporta il disaccoppiamento dei contributi lungo 1 e 2 del momento flettente. Considerando l'esempio in figura 2, l'integrale

$$\overline{EJ}_{12} = \iint_A E_z d_1 d_2 dA \quad (2)$$

con d_1 e d_2 distanza dagli assi 1 e 2, risulterà nullo.

Dunque $\vec{M} = (M_1, M_2)$ dove

$$\frac{M_1}{EJ_1} + 0 \cdot M_2 = \frac{1}{\rho_1} \quad (3)$$

$$\frac{M_2}{EJ_2} + 0 \cdot M_1 = \frac{1}{\rho_2} \quad (4)$$

Essendo la sezione simmetrica si osserva che ogni rotazione di 90° del sistema di riferimento $G12$ è nuovamente principale d'inerzia. In generale quindi si preferisce usare profilati simmetrici per evitare deformazioni non previste e potenzialmente dannose.

Ad esempio guardando la figura 3 e caricando la trave siffatta con un momento in direzione $-x$ ci si aspetta che esso defletta unicamente rispetto ad un piano orizzontale, al contrario nel caso reale si riscontra una deflessione anche rispetto ad un piano verticale, dovuta ad una non perfetta simmetria del problema.

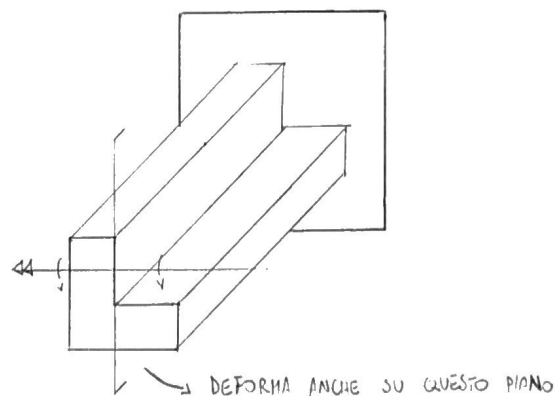


Figura 3

3 Soluzione analitica per una sezione a C

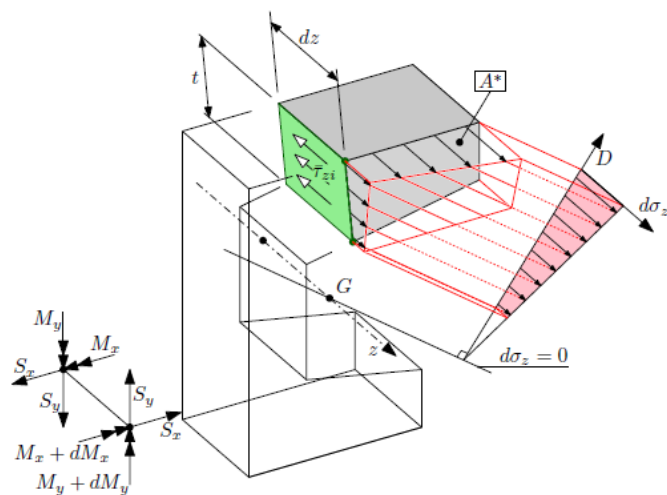


Figura 4

Dalla formula di definizione delle componenti del taglio

$$S_y = \frac{dM_x}{dz} \quad S_x = -\frac{dM_y}{dz} \quad (5)$$

in cui il segno $-$ risulta dalle equazioni dell'equilibrio, si nota che da una variazione del momento flettente in x deriva un taglio in y e viceversa.

Analizzando il concio di trave in figura 4 si ha una variazione lineare di ϵ_z in dz , da cui essendo il materiale uniforme in z si hanno analoghe considerazioni su σ_z . Da ciò si evince che è possibile scrivere per le tensioni

sulla faccia frontale $\sigma_z + d\sigma_z = \sigma_z + \alpha dz$ dove $\alpha = \frac{d\sigma_z}{dz}$. σ_z è dunque scrivibile come combinazione lineare delle caratteristiche di sollecitazione applicate alla sezione (N, Mf_x, Mf_y)

$$\sigma_z = E_z \epsilon_z = \alpha M_x + \beta M_y + \gamma N \quad (6)$$

Dove i coefficienti α, β, γ hanno l'espressione già vista nelle lezioni precedenti, che si riporta qui per completezza

$$\begin{aligned} \alpha &= E_z \frac{-\overline{EJ}_{xy}x + \overline{EJ}_{yy}y}{\overline{EJ}_{xx}\overline{EJ}_{yy} - \overline{EJ}_{xx}^2} \\ \beta &= E_z \frac{-\overline{EJ}_{xx}x + \overline{EJ}_{xy}y}{\overline{EJ}_{xx}\overline{EJ}_{yy} - \overline{EJ}_{xx}^2} \\ \gamma &= E_z \frac{1}{EA} \end{aligned}$$

Derivando la (6) in z

$$\frac{\sigma_z}{dz} = \alpha S_y - \beta S_x \quad (7)$$

Si annulla il contributo dello sforzo normale poiché esso è costante in z . Si sostituiscono nella formula le espressioni di S_x e S_y , riuscendo così a mettere in relazione diretta il taglio in x e y con la variazione di σ .

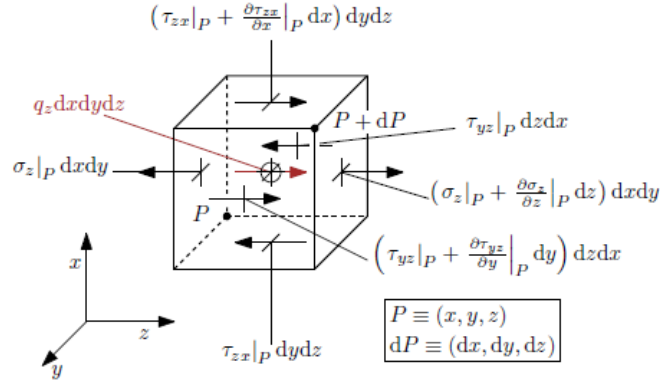


Figura 5

Analizzando l'equilibrio del cubetto elementare in figura 5 in direzione z , considerando per completezza anche un carico distribuito q_z che tiene conto di forze gravitazionali e inerziali, si ha

$$\frac{d\tau_{zx}}{dx} + \frac{d\tau_{yz}}{dy} + \frac{d\sigma_z}{dz} + q_z = 0 \quad (8)$$

Trascurando il termine q_z , si evince che deve essere presente una componente di taglio non nulla.

La distribuzione esatta di τ_{zx} e τ_{yz} sulla sezione si può tuttavia ottenere solamente per un numero molto limitato di sezioni estremamente semplici (*circolari, circolari cave, ellittiche, ellittiche cave, quadrate, rettangolari*). Da qui la necessità di trovare soluzioni approssimate tramite l'approccio di Jourawsky.

4 Approccio alla Jourawsky

Dallo studio della rottura a taglio dei travini in legno per applicazioni ferroviarie, egli si dedicò alla trattazione di tale fenomeno notando come il legno, per sua naturale composizione anisotropa fibrosa, resiste molto bene a flessione e meno a taglio.

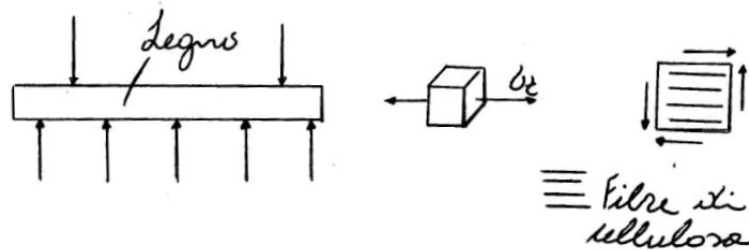


Figura 6

Dalla figura 6 è possibile notare come la direzione parallela delle fibre di cellulosa comporta scarsa resistenza in quanto esse tendono a scorrere l'una sull'altra; nel caso invece della sollecitazione a momento flettente ciascuna fibra contribuisce alla rigidezza flessionale totale della traversa.

Facendo nuovamente riferimento al concio di trave in 4, si isola con una linea t (non necessariamente retta) una porzione di sezione definita A^* .

Considerando ora la faccia colorata in verde, si assume il contributo medio di τ in direzione z , denominato τ_{zi} dove i sta per 'inward', in quanto è quello interessato dall'equilibrio, anche se nel caso reale è possibile avere una distribuzione qualunque di tensioni taglianti.

In ogni punto di A^* sulla faccia posteriore si ha σ_z mentre sul fronte $\sigma_z + d\sigma_z$, dall'equilibrio rimane solamente il termine $d\sigma_z$, indice di uno squilibrio localizzato che posso graficare lungo la sezione ottenendo una superficie sul piano xy .

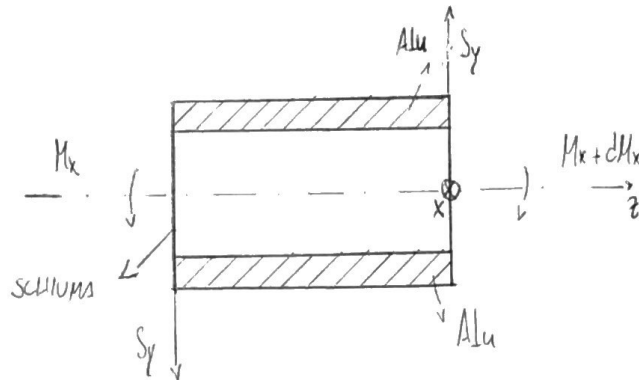


Figura 7

Riprendendo ad esempio il materiale sandwich in figura 7 (alluminio-schiuma-alluminio) e graficando la farfalla delle tensioni per la faccia retro, si nota che essa ha un andamento doppiamente lineare con discontinuità al cambio di materiale.

Sulla faccia fronte essa avrà lo stesso andamento ma leggermente amplificato coerentemente con l'incremento delle σ_z . In particolare per passare dal grafico della faccia posteriore a quello della faccia anteriore è sufficiente moltiplicare per $(1 + \frac{dM_x}{M_x})$, ottenendo la farfalla in figura 8.

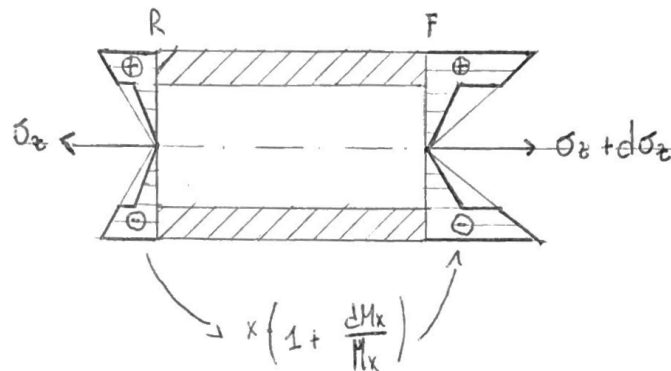


Figura 8

Integrando il contributo di $d\sigma_z$ sulla superficie A^* risulta un contributo di forza in direzione z che dev'essere equilibrato dalla τ_{zi} per l'area su cui agisce, giungendo alla forma

$$\bar{\tau}_{zi} t dz = \iint_{A^*} \frac{d\sigma_z}{dz} dz dA \quad (9)$$

Essendo dz indipendente dalla variabile d'integrazione è possibile semplificarlo e ottenere l'espressione del *flusso di taglio* $q_{zi} = \tau_{zi}t$, caratteristico di ogni specifica sezione in cui mi posiziono.

$$q_{zi} = \iint_{A^*} \frac{d\sigma_z}{dz} dA \quad (10)$$

Per dare un senso fisico al valore $\bar{\tau}_{zi}$ si definisce la media integrale delle τ agenti lungo la curva di taglio.

In particolare in questa trattazione si è trascurato il fatto che τ_{zi} non sia uniforme e siano quindi presenti zone di picco e di valle.

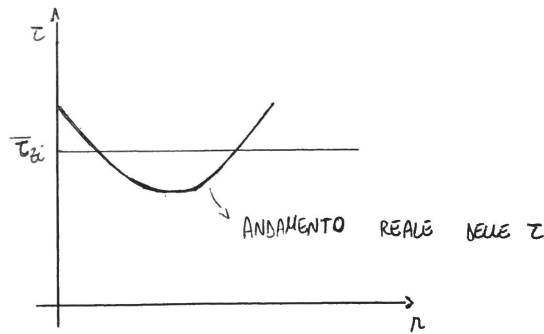


Figura 9

Tornando alla (10), sostituendo l'espressione di $\frac{d\sigma_z}{dz}$ si ottiene la formula di Jourawsky in forma classica, ovvero

$$\bar{\tau}_{zi}t = \iint_{A^*} \left(\frac{yS_y}{J_{xx}} + \frac{xS_x}{J_{yy}} \right) dA = \frac{\bar{y}^* A^*}{J_{xx}} S_y + \frac{\bar{x}^* A^*}{J_{yy}} S_x \quad (11)$$

Dato che Jourawsky considera un valore medio delle τ in direzione perpendicolare alla sezione individuata, l'approccio risulta tanto più affidabile quanto più l'andamento reale delle τ è uniforme.

5 Sezioni aperte in parete sottile

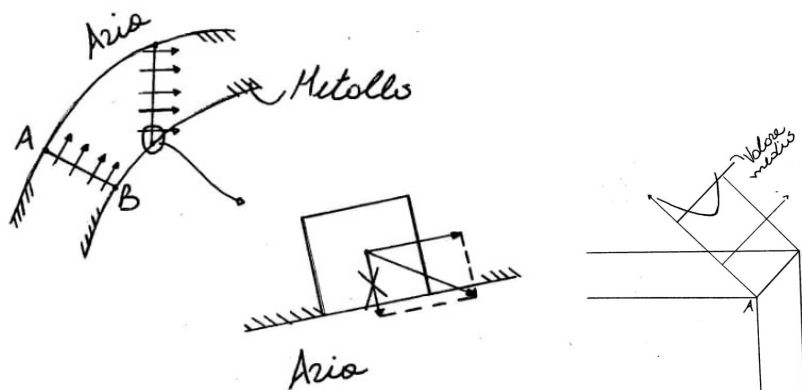


Figura 10

Considerando ora la figura 10 in linea teorica si può scegliere una t come quella cerchiata, ma così facendo si avrebbe anche una componente di taglio ortogonale alla parete che per reciprocità non può che essere nulla.

Per casi particolari, ad esempio in presenza di effetto intaglio, come nel caso di destra della figura precedente, eventuali massimi e minimi delle τ possono discostarsi notevolmente dal valor medio assunto, la soluzione approssimata risulterebbe pertanto lontana da quella reale. In queste situazioni è necessario procedere con molta cautela prima di assumere come affidabili le soluzioni del metodo.

Applicando la formula precedente al caso di una sezione aperta in parete sottile, si scrive

$$\bar{\tau}_{zi}t = \int_0^s \int_{-t/2}^{t/2} \frac{d\sigma_z}{dz} dA \quad (12)$$

per facilitarne la risoluzione è consigliabile sostituire $\frac{d\sigma_z}{dz}$ con il suo valore campionato sulla linea media, sfruttando l'ipotesi

$$\bar{\tau}_{zi}t = \iint_{A^*} \frac{d\sigma_z}{dz} \Big|_{r=0} dA \quad (13)$$

questa semplificazione è possibile nel caso in cui il materiale sia omogeneo e in cui il profilo non sia eccessivamente curvo poiché in tal caso la parete con area maggiore avrebbe più incidenza rispetto a quella con area inferiore.

6 Sezioni chiuse in parete sottile

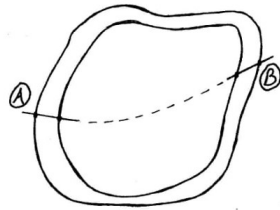


Figura 11

Nel caso in cui si debbano analizzare i carichi agenti su una sezione chiusa, è necessario procedere utilizzando due curve A e B che intersechino la sezione in modo da rendere aperto il concio di trave. È possibile anche pensare di utilizzare una curva sola come quella tratteggiata in figura 11, ma in questo modo si otterrà un valore di τ medio tra le due superfici. Tale valore risulterà corretto solamente nel caso di un problema con geometria e caricamento perfettamente simmetrici, altrimenti fornirà una quantità non corrispondente a nessuna tensione realmente agente sulla sezione.

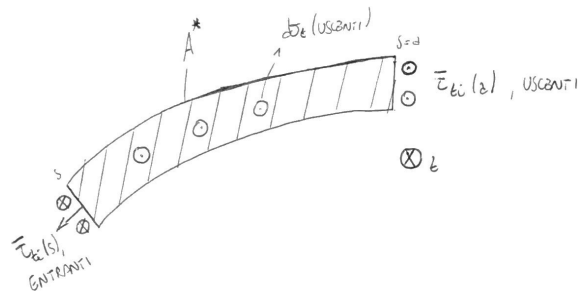


Figura 12

Utilizzando questa costruzione, non sarà possibile affermare a priori (come invece avveniva nel caso di sezione aperta) che sulla faccia di inizio integrazione non agisca alcuna τ , in quanto essa non è più una superficie libera, ma si tratta di una faccia interna al corpo virtualmente sezionato, il caricamento è rappresentato in figura 12.

Bisogna perciò modificare la formula ottenuta inserendo anche il contributo di tale sezione.

$$\bar{\tau}_{zi}(s)t(s) = \int_{-t/2}^{t/2} \int_a^s \frac{d\sigma_z}{dz} dA + \bar{\tau}_{zi}(a)t(a) \quad (14)$$

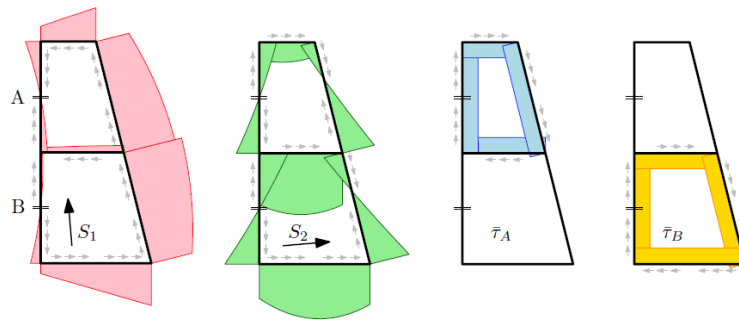


Figura 13

Prendiamo ora in esame il caso più complesso proposto in figura 13. La sezione è chiusa e non simmetrica, pertanto è necessario individuare due zone in cui tagliarla al fine di ottenere una struttura aperta e applicare la (14). In particolare è conveniente utilizzare A e B come piano di taglio, non trascurando che su queste facce, essendo interne alla struttura, la τ non era nulla all'inizio del problema. Per meglio comprendere come si ragiona in questi casi è fornito uno schizzo della sezione ingrandita in figura 14.

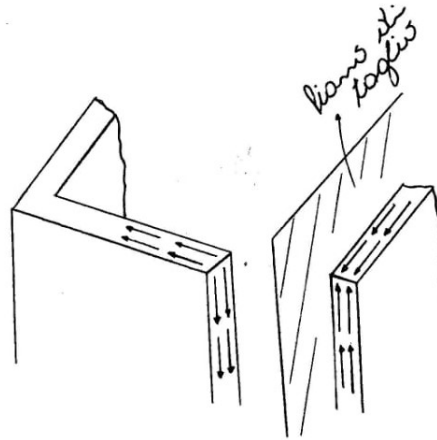


Figura 14

Si vede bene che sulle facce 'dirimpetto' separate dal piano di taglio le τ non risultano nulle.

Per procedere alla valutazione grafica dello stato tensionale si utilizza il principio di sovrapposizione degli effetti prodotti su ciascuna porzione della trave dalle caratteristiche di sollecitazione applicate, rappresentate nella figura con diversi colori. Questo ragionamento sarà illustrato in maniera più approfondita nella prossima lezione.