

Lezione a cura di Alessio Mori, Edoardo Orsini, Filippo Sau.

Proseguendo dalla lezione precedente riguardo gli elementi della matrice di rigidità. Consideriamo un elemento in configurazione deformata, per il quale la deformazione è descritta dal vettore  $\underline{d}$ , contenente i valori di spostamenti e rotazioni nodali. A fronte di questo stato deformativo si ricava uno stato tensionale  $\underline{\sigma}(\underline{d})$  che è funzione di  $\underline{d}$ . Si avrà che  $\underline{\sigma} = \underline{D}(z)\underline{\epsilon}$ , dove  $\underline{D}$  è la matrice di legame costitutivo. Lo stato di deformazione puntuale è definito in funzione di  $\underline{D}$  stesso e dato lo stato deformativo posso ricostruire lo stato tensionale:

$$\underline{\sigma} = \underline{D}(z) (\underline{B}_0(\xi, \eta) + \underline{B}_1(\xi, \eta) z) \underline{d}$$

Vado ora a perturbare lo stato deformativo attraverso una perturbazione infinitesima:  $\underline{d} + \delta\underline{d}$ . Il fatto che  $\delta\underline{d}$  sia infinitesima mi garantisce che non verrà generato il termine  $\delta\underline{\sigma}$ , lasciando  $\underline{\sigma}$  costante.

Sul nostro elemento agiscono delle azioni interne e delle forze nodali esterne che compiono un lavoro virtuale esterno:

$$\delta Q_e = \delta\underline{d}^T \underline{F}$$

Ciò crea una deformazione interna che mi fa passare dallo stato  $\underline{\epsilon}$  allo stato  $\underline{\epsilon} + \delta\underline{\epsilon}$ . Bisogna quindi considerare il lavoro virtuale interno:

$$\delta Q_i = \underline{\sigma}^T \delta\underline{\epsilon} = (\underline{\sigma}^T \delta\underline{\epsilon})^T = \delta\underline{\epsilon}^T \underline{\sigma}$$

In realtà, più propriamente, si tratta di una densità di lavoro virtuale interno, la quale può essere anche espressa come:

$$\delta\underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} = \delta\epsilon_x \sigma_x + \delta\epsilon_y \sigma_y + \delta\gamma_{xy} \tau_{xy}$$

da quest'ultima si evince come essa sia legata esclusivamente alle componenti tensionali deformative entropiano.

Integrando sul volume la quota parte dovuta alle tensioni entropiano si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta Q_i^\sigma &= \iiint_{\mathcal{A}} \int_h \delta \underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} dz d\mathcal{A} \\ &= \iiint_{\mathcal{A}} \int_h ((\underline{B}_0 + \underline{B}_1 z) \delta \underline{d})^T \underline{D} (\underline{B}_0 + \underline{B}_1 z) \underline{d} dz d\mathcal{A} \end{aligned}$$

da cui, sfruttando la proprietà delle trasposte  $(A B)^T = B^T A^T$  e considerando che sia  $\underline{d}$  che  $\delta\underline{d}$  sono quantità costanti, possiamo portare fuori dall'integrale riscrivendo tutto nella forma:

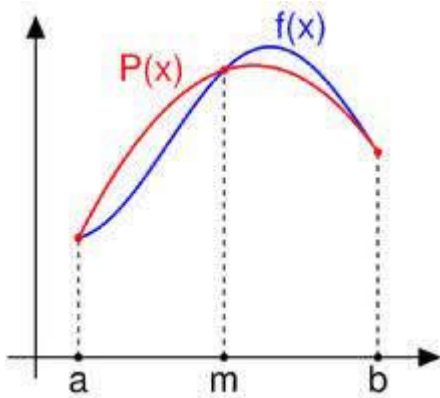
$$\begin{aligned} &= \delta \underline{d}^T \left[ \iiint_{\mathcal{A}} \int_h (\underline{B}_0^T + \underline{B}_1^T z) \underline{D} (\underline{B}_0 + \underline{B}_1 z) dz d\mathcal{A} \right] \underline{d} \\ &= \delta \underline{d}^T \underline{K}_\sigma \underline{d} \end{aligned}$$

$K_0$  ha tante righe, quante colonne, tanti sono i gradi di libertà.

Mi chiedo ora che natura abbia l'integrando.  $B_0$  e  $B_1$  sono funzioni di  $z$ , non è detto però che siano delle funzioni a primitiva nota, quindi in generale non sempre è possibile risolvere l'integrale analiticamente.

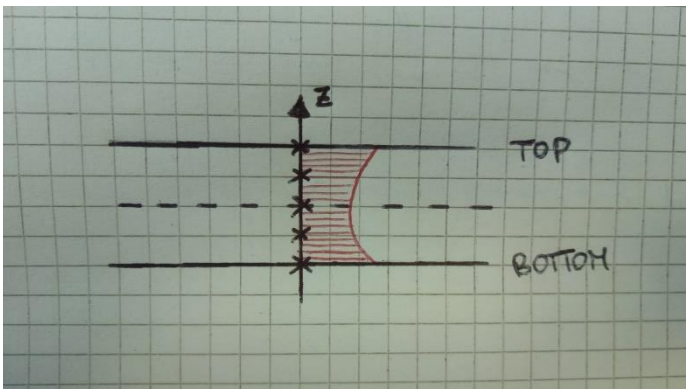
Per risolvere l'integrale si possono usare vari metodi numerici, in particolar modo risulta conveniente usare due regole di quadratura diverse:

1. una regola di quadratura gaussiana per l'integrazione sull'area, avente 2 punti di campionamento per asse, per un totale di 4 punti di campionamento sull'area
2. una Simpson Rule per l'integrale in  $z$ , ovvero sullo spessore. Vado quindi ad effettuare una quadratura secondo le regole di Simpson:



Campiono in  $a$  e  $b$  ed utilizzo un terzo punto di campionamento mediano ad  $a+b/2$ . Calcolo l'espressione della parabola che passa per i tre punti e come valutazione dell'integrale utilizzo l'area sottesa alla stessa.

I punti di campionamento possono anche essere impostati sul software MSC Marc andando in Shell Beam Layers, dove troveremo questo parametro impostato di default su 5 punti.



Con 5 punti di campionamento è possibile definire due sottodomini su cui effettuare un'integrazione tramite regola di Simpson tra top e bottom.

Vado in questo modo ad effettuare il calcolo delle due aree sottese ad una parabola, utilizzando quindi un Simpson a tratti (composite Simpson rule).

Per quale motivo utilizzo questa legge lungo lo spessore? Preferisco usare questo metodo quando si ammette che il modello può avere uno snervamento laterale per il materiale.

Se il materiale vicino a top e bottom snerva, nonostante stiamo lavorando con un componente di materiale omogeneo, a livello di risposta elastica esso risulterà disomogeneo, avendo quindi una variazione della matrice del legame costitutivo  $D$ .

Il numero di campionamenti lungo lo spessore mi definisce perciò lo stato di elasticità del materiale.

Se è snervato o meno posso infatti verificarlo unicamente nei punti di campionamento, mentre dagli altri punti non avrò informazioni. Con 5 punti di campionamento ho quindi una resa piuttosto grezza del posizionamento della frontiera elasto-plastica all'interno dello spessore.

Ad esempio applicando un momento ad una piastra, il materiale a top e bottom snerverà, generando quindi una frontiera elasto-plastica che cresce al crescere della coppia. In casi come questo, per avere una discretizzazione più fine, occorre aumentare il numero dei punti di campionamento.

La guida del software MSC Marc consiglia per analizzare questo comportamento di utilizzare da 7 ad 11 punti di integrazione.

Decidendo di utilizzare un numero di punti di integrazione alto, non sarà necessario applicare una legge di quadratura gaussiana ma basterà applicarne una più semplice.

In generale ho informazioni nei punti d'integrazione, ed una regola che prevede un campionamento in top e bottom è importante proprio perché mi andrà a fornire indicazioni in quelli che per noi sono punti di interesse.

Per questo motivo sullo spessore è preferibile usare Simpson piuttosto che una quadratura gaussiana.

Sull'area invece è conveniente utilizzare una quadratura gaussiana a due punti per asse, perché è la quadratura di ordine più basso e risulta molto economica a livello computazionale, inoltre rispetto a quella ad un unico punto di campionamento, mi restituisce un integrale esatto per una sottofamiglia di elementi quadrilateri privi di distorsione.

Si avranno quindi elementi piani, con 4 nodi complanari, aventi la forma di un parallelogramma, i quali ci garantiscono che la matrice Jacobiana sia una costante nell'elemento.

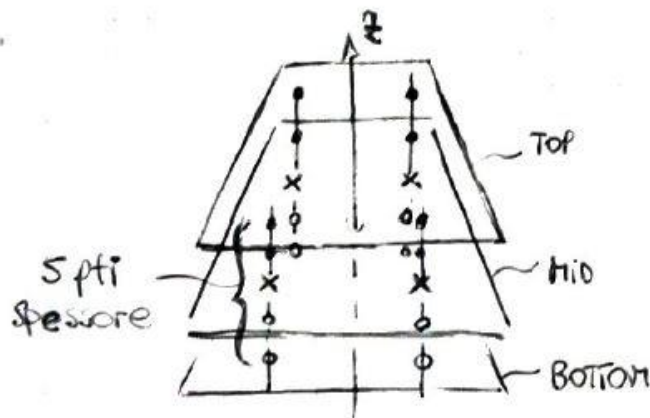
È importante che la matrice Jacobiana sia costante perché il suo determinante compare al denominatore nella definizione dell'operatore  $\underline{\underline{L}}(\xi, \eta)$ .

Se lo Jacobiano è una costante e l'integrando è lineare in  $\xi$  e  $\eta$ , allora il prodotto è un quadrato in  $\xi$  e  $\eta$ .

Quindi la legge con 2 punti di campionamento mi restituisce un integrale esatto.

Per quegli elementi che non sono dei parallelogrammi ho un errore di integrazione, che viene comunque ritenuto tollerabile nella maggior parte dei casi.

La matrice di rigidezza  $K\sigma$  deriva quindi da un'integrazione. Per poter rappresentare con più precisione lo stato tensionale possiamo infittire il campionamento sull'asse  $z$  passando dal layer a 4 ad un layer a 5 o a 7.



Ho nel caso in figura un campionamento di  $4 \times 5 = 20$  punti.

Ripeto la procedura effettuata per le deformazioni entropiano, per le deformazioni fuoripiano:

$$\begin{aligned}
 \delta Q_i^\gamma &= \iint_{\mathcal{A}} \int_h \delta \underline{\bar{\gamma}}^\top \underline{\bar{\tau}} dz d\mathcal{A} \\
 &= \delta \underline{d}^\top \left[ h \iint_{\mathcal{A}} \underline{\underline{B}}_\gamma^\top \underline{\underline{D}}_\gamma \underline{\underline{B}}_\gamma d\mathcal{A} \right] \underline{d} \\
 &= \delta \underline{d}^\top \underline{\underline{K}}_\gamma \underline{d}.
 \end{aligned}$$

L'apice sulla  $\delta Q_i^\gamma$  indica proprio il fatto che tali deformazioni siano fuoripiano.

Trovati i due termini riguardanti le deformazioni interne entropiano e fuoripiano, possiamo andarli a sommare ricavando il lavoro necessario per la deformazione interna totale:

$$\begin{aligned}
 \delta Q_i &= \delta Q_i^\sigma + \delta Q_i^\gamma \\
 &= \delta \underline{d}^\top (\underline{\underline{K}}_\sigma + \underline{\underline{K}}_\gamma) \underline{d} \\
 &= \delta \underline{d}^\top \underline{\underline{K}} \underline{d}.
 \end{aligned}$$

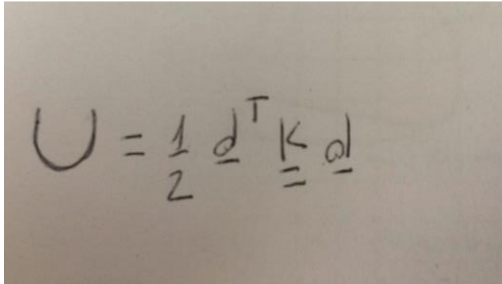
Poichè il lavoro che compiono le forze interne ed esterne si eguaglia, dal principio dei lavori virtuali otteniamo:

$$\delta \underline{d}^\top \underline{F} = \delta Q_e = \delta Q_i = \delta \underline{d}^\top \underline{\underline{K}} \underline{d}, \quad \forall \delta \underline{d},$$

ed affinché ci sia equilibrio tra le forze esterne e quelle interne dobbiamo avere:

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{K}} \underline{\underline{d}}$$

Ricaviamo anche l'energia potenziale elastica  $U$  tramite la formula:


$$U = \frac{1}{2} \underline{\underline{d}}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{d}}$$

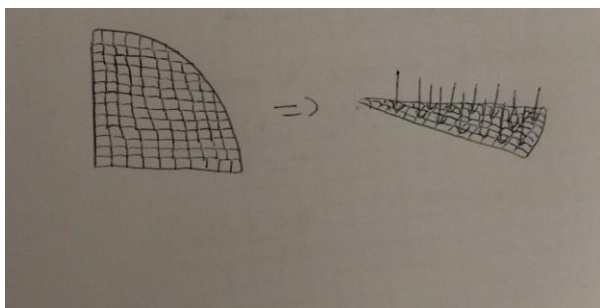
La matrice  $\underline{\underline{K}}$ , che deriva dall'integrazione, descrive la deformazione dell'elemento collegandola alle forze esterne generalizzate (sono generalizzate perchè stiamo utilizzando il PLV).

Aver ricavato tale legame è importante perchè se la matrice  $\underline{\underline{K}}$  fosse a rango pieno potrei ricavare il vettore  $\underline{\underline{d}}$  a partire dalla conoscenza di  $\underline{\underline{F}}$ . Condizione necessaria ad avere  $\underline{\underline{K}}$  con rango pieno è che l'energia  $U > 0, \forall \underline{\underline{d}} \neq 0$  ( tale considerazione deriva dalla definizione di matrice definita positiva). Poichè non è scontato che  $U$  sia diversa da 0, allora il rango di  $\underline{\underline{K}}$  non può essere pieno. Conseguenza di ciò è che non posso ricavare  $\underline{\underline{d}}$  da  $\underline{\underline{F}}$ .

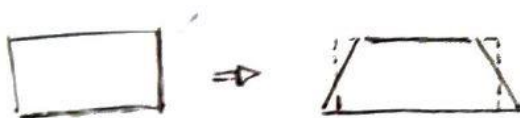
## SHEAR LOCKING

(irrigidimento da taglio)

Andiamo a considerare una piastra appoggiata sul bordo e caricata da una pressione esterna  $p$ . Consideriamo uno spessore  $t=2\text{mm}$  e un raggio  $a=200\text{mm}$ .



Tale corpo soggetto alla pressione  $p$  si deforma inflettendosi.



Per rappresentare l'oggetto deformato possiamo introdurre un rettangolo in grado di deformarsi in forma trapezoidale.

Mettendo insieme tanti elementi trapezoidali riesco a rappresentare il corpo deformato. Nel risolvere tale problema posso utilizzare un approccio FEM dal quale risulta un abbassamento di 25,8mm.

Ora per verificare questo risultato procederemo per via analitica.

Utilizzeremo due contributi relativi all'abbassamento, uno flessionale e uno tagliante:

$$\text{Abbassamento flessionale} = \frac{3a^2(\nu + 5)(1 - \nu^2)\rho}{16E(1 + \nu)t^3}$$

$$\text{Abbassamento tagliante} = \frac{3a^2(1 - \nu^2)}{5E(1 - \nu)t}$$

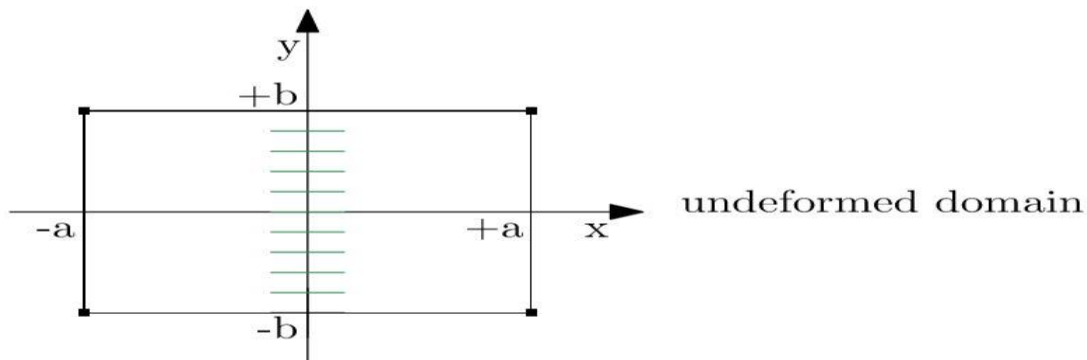
Con INPUT  $\nu=3$ ,  $E=70000\text{Pa}$ ,  $p=0,1$ ,  $a=200$ ,  $t=2$ .

Otteniamo in OUTPUT un abbassamento di 198mm.

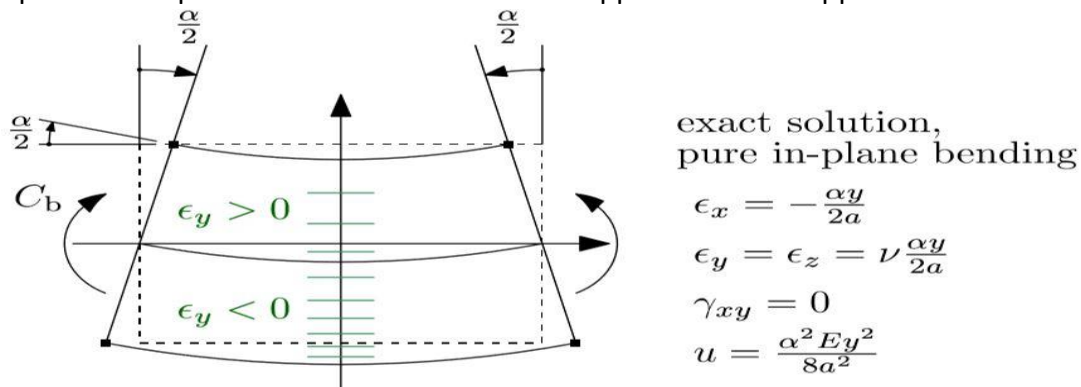
Ciò corrisponde a dire che il modello FEM ci fornisce una piastra più rigida rispetto a quella reale, ottenuta per via analitica, di circa 7,7 volte. Poichè entrambi i metodi sono stati eseguiti correttamente ci si domanda dove possa essere l'errore.

L'errore si trova nell'interpolazione utilizzata per ottenere  $\underline{K}$ .

Introduco il problema con il dominio indeformato,

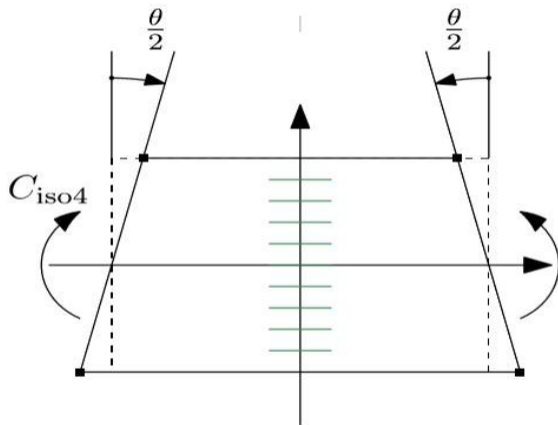


ed ipotizzato di portare in flessione l'elemento applicando due coppie.



Assunta la rotazione libera in  $z$ , avendo assenza di uno stato tensionale in  $y$  posso affermare di avere tensione piana per le stratificazioni in  $y$  e  $z$ . Poichè di quest'oggetto ho la soluzione esatta, ottengo le informazioni riportate nella figura a destra.

Prendo ora in considerazione un elemento isoparametrico a 4 nodi al quale applico due coppie.



four noded, isop. element,  
in-plane trapezoidal mode

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= -\frac{\alpha y}{2a} \\ \epsilon_y &= 0, \quad \epsilon_z = \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\alpha y}{2a} \\ \gamma_{xy} &= -\frac{\alpha x}{2a} \\ u &= \left(1 + \frac{\nu^2}{1-\nu^2}\right) \frac{E\alpha^2 y^2}{8a^2} + \frac{G\alpha^2 x^2}{8a^2}\end{aligned}$$

Confrontando questi due casi si può osservare come la  $\epsilon_x$  si mantenga uguale, mentre la  $\epsilon_y$  no. Inoltre con l'elemento isoparametrico ho una deformazione entropiano  $\gamma_{xy}$  che prima non avevo.

exact solution, pure in-plane bending      four noded, isop. element, in-plane trapezoidal mode

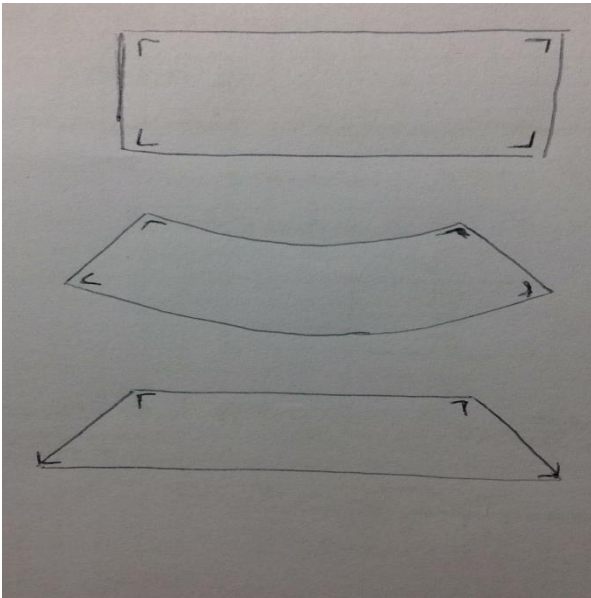
$\epsilon_x = -\frac{\alpha y}{2a}$	$\epsilon_x = -\frac{\alpha y}{2a}$
$\epsilon_y = \epsilon_z = \nu \frac{\alpha y}{2a}$	$\epsilon_y = 0, \quad \epsilon_z = \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\alpha y}{2a}$
$\gamma_{xy} = 0$	$\gamma_{xy} = -\frac{\alpha x}{2a}$
$u = \frac{\alpha^2 E y^2}{8a^2}$	$u = \left(1 + \frac{\nu^2}{1-\nu^2}\right) \frac{E\alpha^2 y^2}{8a^2} + \frac{G\alpha^2 x^2}{8a^2}$

Infine si nota che nell'elemento isoparametrico è presente quota parte di energia potenziale elastica unitaria  $u$ , che prima non avevo.

Andando ad integrare  $u$  sul dominio si ottiene l'energia potenziale elastica dalla quale tramite il teorema di Castigliano viene ricavata la coppia  $b$  per l'elemento reale  $C_b$  e la coppia iso per l'elemento isoparametrico  $C_{iso}$ . Volendo confrontare le due coppie ottenute a parità di angolo otteniamo:

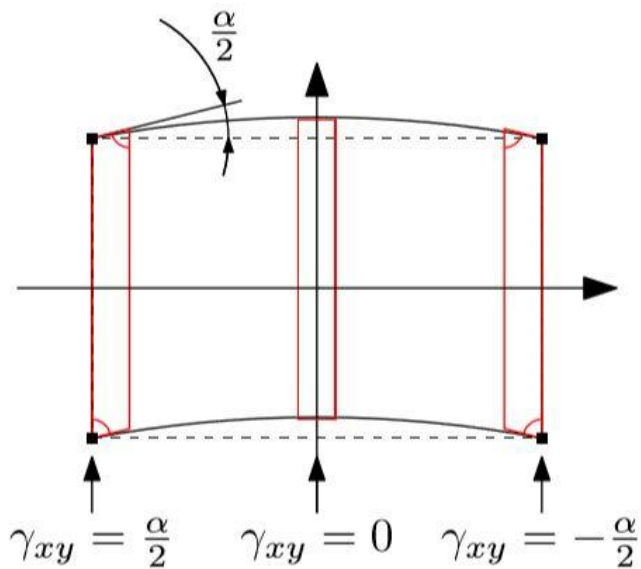
$$\begin{aligned}\frac{C_{iso}}{C_b} &= f(\nu, a, b) \approx 1,48 \\ \nu &= 0.3, \\ \frac{a}{b} &= 1\end{aligned}$$

Andando ad aumentare il rapporto tra  $a$  e  $b$  aumenta ancora il rapporto tra le due coppie. Abbiamo così ottenuto un irrigidimento del 48%. Tale irrigidimento deriva dall'energia potenziale elastica del modello isoparametrico che è da considerarsi spuria. Dato l'elemento, se dopo la deformazione gli angoli non risultano più di  $90^\circ$  vuol dire che siamo in presenza di una deformazione tagliante.



### SOLUZIONE AL PROBLEMA

Dalla differenza tra la soluzione isoparametrica e quella esatta ottengo la residua:



residual (spurious)  
shear deformation;

overall error assessment:

$$\frac{C_{iso4}}{C_b} = \frac{1 + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{a}{b}\right)^2}{1-\nu^2}$$

$$\approx 1.48 \text{ if } \nu = 0.3, \frac{a}{b} = 1$$

NOTA: se campionassi solamente nel centroide otterrei un errore molto minore rispetto alla isoparametrica, ciò avviene poichè nel centroide  $x = 0$  (non ho deformazione tagliante entropiano) ed il termine legato a  $\nu$  non influisce di molto sui calcoli:

$$U = \left(1 + \frac{\nu^2}{2-\nu^2}\right) \frac{\alpha^2 E y^2}{8\alpha^2} + G \alpha^2 x^2$$



Andando ora a considerare l'energia potenziale elastica nel caso residuo, ottengo un abbassamento di 192,4mm che rispetto ai 198mm della soluzione esatta, mi danno un errore di circa il 3%. Utilizzando un modello senza la componente  $\Upsilon_{xy}$  ottengo un risultato accettabile.

Sorge però un altro problema, nel centroide oltre ad annullarsi i termini dipendenti da  $x$  si annullano anche quelli dipendenti da  $y$  visto che anche  $y = 0$ .

Osservando l'equazione precedente mi ritroverei senza energia potenziale elastica poichè entrambi i termini spariscono (nel centroide). Possiamo quindi dire, essendo  $u = 0$ , che il nostro elemento ha un comportamento rigido.

Introduciamo quindi una nuova classe di elementi detti **Meccanismi interni**, i quali sono caratterizzati dall'aver energia potenziale elastica nulla pur non trattandosi di corpi rigidi, per evidenti motivi deformativi.