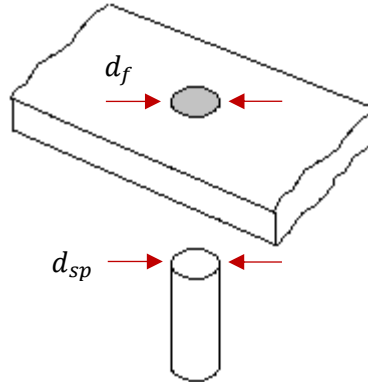


Lezione del 21/03/2019

a cura di Edoardo Casciotta, Alessandro Pica e Tommaso Proietti

Il terzo caso analizzato in Maxima prevede lo studio di una lastra forata, nel cui foro è inserita una spina di materiale più rigido di quello che compone la lastra.



La differenza di rigidità tra i due materiali ci consente di dividere lo studio in due sottoproblemi le cui soluzioni, combinate linearmente, ci daranno la soluzione del problema:

1. Lastra con inclusione rigida (carico esterno + interferenza nulla);
2. Problema di interferenza (carico esterno nullo + interferenza);

la soluzione vedrà: carico esterno + interferenza.

In entrambi i casi, per eseguire uno studio tensionale, è stato necessario considerare il diametro della spina d_{sp} leggermente maggiore del diametro del foro d_f , per avere un forzamento.

1) Lastra con inclusione rigida.

In questo primo sottoproblema prendiamo in considerazione la sola lastra, nel cui foro considereremo un'inclusione di materiale più rigido di quello che la compone. Come detto, considereremo la presenza di un carico esterno ma l'interferenza sarà nulla. Al bordo interno ho una tensione dovuta all'inclusione che, a remoto, dovrà scaricarsi: se a remoto avessi uno stato tensionale non nullo avrei una densità di energia non nulla la quale, integrata radialmente da 0 ad una distanza infinita, darebbe ∞ come risultato. Ciò starebbe a significare che, da un lavoro finito, si riuscirebbe ad ottenere un'energia infinita: considerazione impossibile. Per tale ragione, a remoto, si considererà lo stato tensionale nullo.

Teoria della piastra

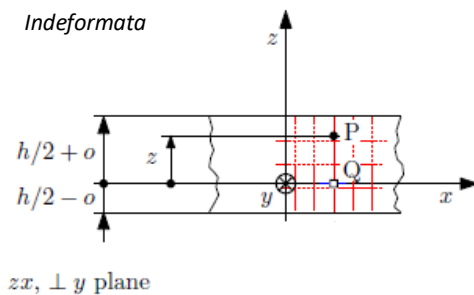
Condizione necessaria affinché si possa studiare una piastra è definire una *superficie media* e, i punti che non si trovano su di essa, seguono il corrispettivo su tale superficie. Mentre la trave ha una superficie predominante sulle altre due, la piastra ne ha due predominanti sulla terza.

Guscio: si ha quando la superficie media non è un piano ma una superficie curva;

Lastra: si ha quando la superficie media è piana ma caricata da sollecitazioni entro piano;

Piastra: si ha quando la superficie media è piana ma caricata da sollecitazioni fuori piano;

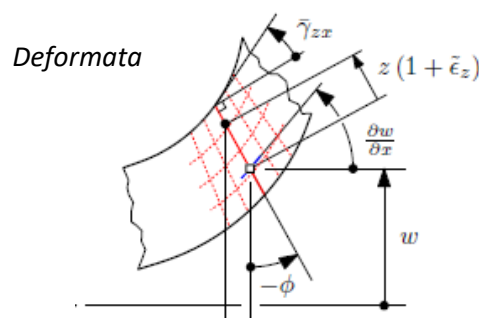
Utilizzo un sistema di assi locali:



Consideriamo un concio di piastra: definito un sistema di riferimento cartesiano (x, y, z) , in questo esempio, possiamo considerare come superficie di riferimento il piano xy . Non è sempre vantaggioso scegliere come superficie di riferimento la superficie media; per tale ragione si introduce l'Offset (scostamento) o che definisce di quanto ci discostiamo dalla superficie media. Se $o=0$ la superficie di riferimento coincide con la superficie media; se $o=-\frac{h}{2}$ allora la superficie di riferimento coincide con la superficie top; se $o=\frac{h}{2}$ allora la superficie di riferimento coincide con la superficie bottom.

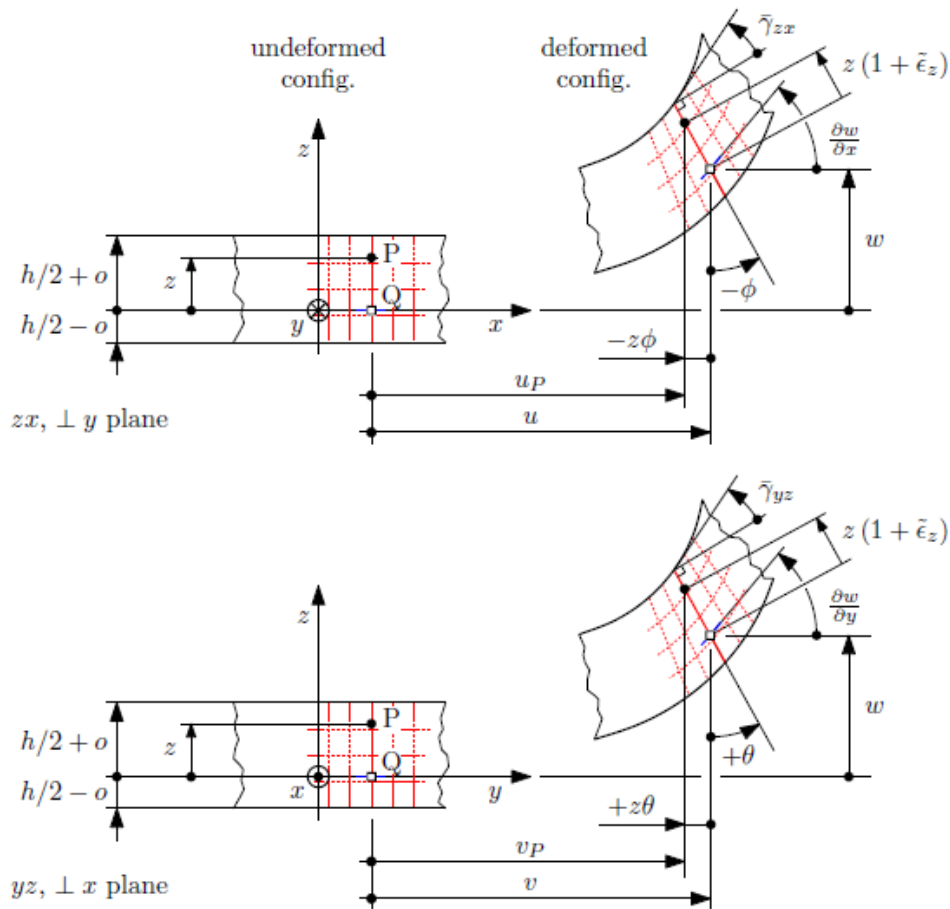
La teoria della piastra definisce dei risultati esatti se lo spessore h è sottile rispetto alle dimensioni della sezione di riferimento.

Consideriamo ora un punto P posto a distanza z dal piano di riferimento e Q la rispettiva proiezione di P sul piano di riferimento e, definito il segmento passante per i punti P e Q , ipotizziamo che tutto il materiale con Q come proiezione si mantenga su un segmento rettilineo nella deformata (\overrightarrow{PQ} nasce e resta rettilineo).



Tutti i punti, quindi, si mantengono lungo quel segmento, ma il segmento rimane ortogonale al piano medio? Nel caso della teoria della piastra flessionale (piastre non deformate a taglio) la risposta è sì, mentre se ammetto la deformazione tagliante (piastra flesso-tagliante) no.

Consideriamo la piastra flesso-tagliante in due orientazioni:



Nella figura in alto, l'angolo Φ è negativo in quanto descrive una rotazione antioraria essendo l'asse y entrante (regola della mano destra). Per lo stesso motivo l'angolo θ è positivo.

Considerando la deformata, la distanza tra P e Q non è più z ma $z(1+\varepsilon_z)$, con ε_z allungamento medio. Definiamo ora i tre spostamenti del punto P rispettivamente lungo gli assi x , y e z , essendo u , v e w gli spostamenti di Q rispettivamente lungo gli assi x , y e z e gli angoli ϕ e θ le inclinazioni della piastra rispetto agli assi y e x :

$$u_p = u + z(1 + \varepsilon_z)\sin\phi$$

$$v_p = v - z(1 + \varepsilon_z)\sin\theta$$

$$w_p = w + z((1 + \varepsilon_z)\cos\phi \cos\theta - 1)$$

Imporre la rigidità del segmento passante tra P e Q è giusto a meno di un infinitesimo di ordine superiore a z ; infatti, se le deformazioni sono piccole $\varepsilon_z \approx 0$. Inoltre, avendo considerato rotazioni infinitesime, il sin dell'angolo è approssimabile al valore stesso dell'angolo:

$$u_p = u + z\phi$$

$$v_p = v - z\theta$$

$$w_p = w$$

La rotazione dei punti sul piano di riferimento intorno all'asse perpendicolare al piano di riferimento (in questo caso asse z) può essere considerata nulla in quanto non da nessuno spostamento né deformazione del materiale (rotazione di *drilling*).

Definiamo le due pendenze rispetto all'asse x ed y:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \bar{\gamma}_{zx} - \varphi \quad (\text{pendenza in x})$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \bar{\gamma}_{yz} + \theta \quad (\text{pendenza in y})$$

e i vettori *deformazioni membranali* ($\bar{\underline{\epsilon}}$) e *curvature* ($\underline{\kappa}$) come:

$$\bar{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_x \\ \bar{\epsilon}_y \\ \bar{\gamma}_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\kappa} = \begin{pmatrix} +\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta}{\partial y} \\ +\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix}$$

con le tre deformazioni:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_P}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v_P}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_P}{\partial y} + \frac{\partial v_P}{\partial x} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + z \left(+\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Deformazioni membranali e curvature sono unite dalla seguente relazione che definisce la deformazione totale del segmento considerato:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \bar{\underline{\epsilon}} + z \underline{\kappa}$$

Esempi svolti al calcolatore con il software Maxima (conclusioni lezione precedente al laboratorio)

Foglio di calcolo denominato "forzamento_ponorigido_in_lastra_v000" ci consente di calcolare l'interferenza radiale necessaria per ottenere una data pressione di contatto al bordo interno in vari scenari tipici semplicemente sostituendo le condizioni al bordo interno (bi) desiderate

- ipotesi di completa aderenza, interferenza imposta

```
res_cc_bi :[  
  ev(my_twomu_ur , r=1 ) - eta*2*mu,  
  ev(my_twomu_ut , r=1 ) - 0  
];
```

- ipotesi di assenza di attrito, interferenza imposta

```
res_cc_bi :[  
  ev(my_twomu_ur , r=1 ) - eta*2*mu,  
  ev(mysrt , r=1 ) - 0  
];
```

- ipotesi di bordo pressurizzato al foro

```
res_cc_bi :[  
  ev(mysrr , r=1 ) + p,  
  ev(mysrt , r=1 ) - 0  
];
```

- ipotesi di aderenza, ma a pressione (e non spostamento)

radiale imposti

```
res_cc_bi :[  
  ev(mysrr , r=1 ) + p,  
  ev(my_twomu_ut , r=1 ) - 0  
];
```

Lastra soggetta a trazione

Foglio di calcolo denominato "lastra_inclusionerigida_trazione" ci consente di calcolare nel caso di lastra soggetta a trazione:

- pressione minima per non avere tensione radiale trattiva
- coefficiente di attrito minimo per garantire aderenza

nel caso di lastra soggetta a trazione le condizioni imposte sono le seguenti

$srr_ff : \text{trigreduce}(srr_from_xy(1,0,0,t));$

$stt_ff : \text{trigreduce}(stt_from_xy(1,0,0,t));$

$srt_ff : \text{trigreduce}(srt_from_xy(1,0,0,t));$

Caso lastra soggetta a taglio a remoto

Sostituendo nel foglio di calcolo le seguenti condizioni

$srr_ff : \text{trigreduce}(srr_from_xy(1,-1,0,t));$

$stt_ff : \text{trigreduce}(stt_from_xy(1,-1,0,t));$

$srt_ff : \text{trigreduce}(srt_from_xy(1,-1,0,t));$

possiamo calcolare :

- pressione minima per non avere tensione radiale trattiva
- coefficiente di attrito minimo per garantire aderenza anche nel caso di lastra soggetta a taglio a remoto