Lezione del 05/03/2019

Sala A. e Bocchi A.

1 Tensioni all'interno di una trave nello spazio

(Si continua la trattazione della lezione del 28/02/2019)
Si prenda in esame la trave rappresentata in figura 1.

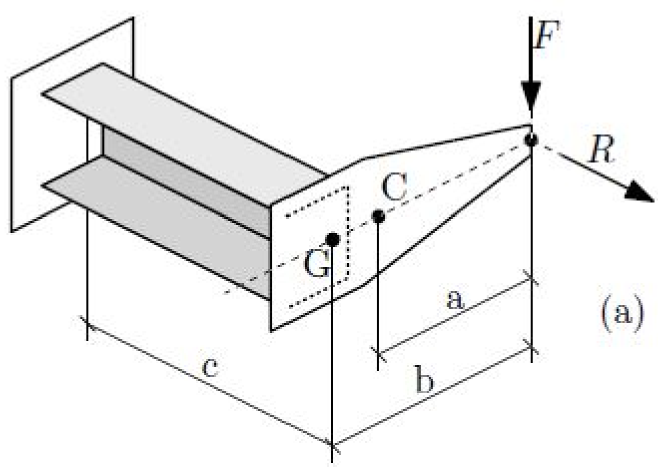

Figure 1: Trave presa in esame

Volendo studiare le tensioni presenti al suo interno, mediante la teoria della trave, occorre sezionarla in una zona sufficientemente lontana dagli incastri. Come si può notare dalla figura 2, la trave in questione presenta tensioni solamente all'interfaccia. Solamente 3 tensioni sono presenti: σ_{zz}, τ_{zy} e τ_{zx}. Le 6 risultanti vengono determinate imponendo l'equilibrio interno della trave.

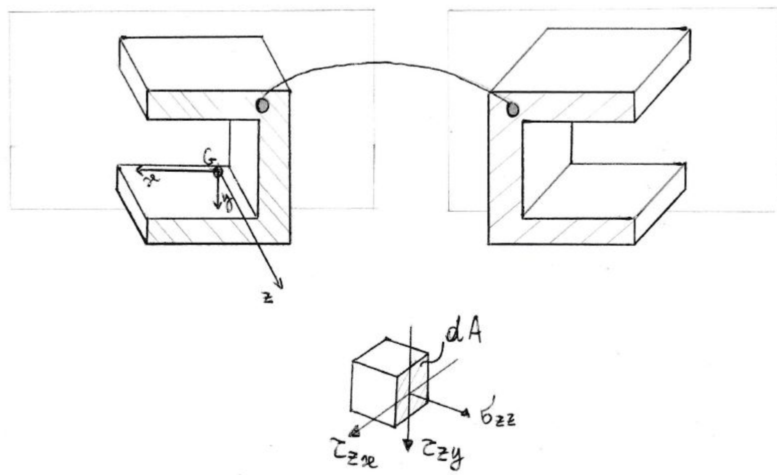

Figure 2: Tensioni interne alla trave

Si impone l'equilibrio alla traslazione rispetto all'asse z, y e x:

$$N = \int_A \sigma_{zz}\, dA \tag{1}$$

$$S_y = \int_A \tau_{zy}\, dA \tag{2}$$

$$S_x = \int_A \tau_{zx}\, dA \tag{3}$$

Al fine di imporre l'equilibrio alla rotazione occorre definire i poli rispetto ai quali viene calcolato.
Si definisce il baricentro G come polo per i momenti risultanti attorno all'asse x e all'asse y.
Per cui otterremo:

$$M_x = \int_A \sigma_{zz} y\, dA \tag{4}$$

$$M_y = -\int_A \sigma_{zz} x\, dA \tag{5}$$

calcolati rispettivamente in (G, x) e in (G, y).
Per definire, invece, il momento risultante attorno all'asse z, occorre definire un polo differente dal baricentro per poter disaccoppiare gli sforzi taglianti e il momento torcente.
Tale polo viene definito centro di taglio, C.

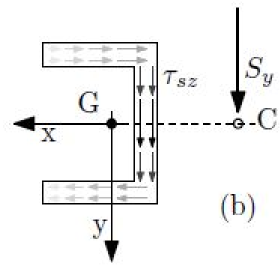

Figure 3: Centro di taglio

Si definisce quindi il momento torcente come:

$$M_t = M_{cz} = \int_A [\tau_{yz}(x - x_c) - \tau_{zx}(y - y_c))]\, dA \tag{6}$$

applicato in (C, z).
L'asse z passante per il centro di taglio, è assunto come polo per il calcolo del momento torcente. Così facendo viene annullato il momento torcente delle risultanti S_y e S_x, poichè il loro braccio è nullo.
C coincide con G tipicamente quando la sezione presenta due asse di simmetria.
Solitamente si cercano prima le 6 risultanti per poi risalire alle tensioni interne alla struttura.
Si esegue il calcolo delle caratteristiche di sollecitazione imponendo l'equilibrio a traslazione e a rotazione della trave nel caso si tratti di una struttura isostatica, altrimenti occorrerà prima renderla isostatica e successivamente imporne l'equilibrio.
Risulta vantaggioso un disegno della trave nello spazio semplificata, ottenuta tracciando la curva che contiene i baricentri delle sezioni.

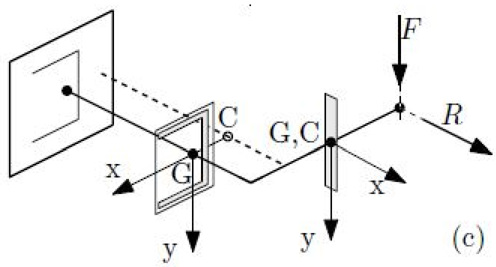

Figure 4: Semplificazione della trave

Si definisce a la distanza della proiezione di C sull'asse della porzione di trave perpendicolare alla porzione incastrata. La lunghezza della porzione di trave in cui vengono applicate la F e la R viene chiamata b. Chiamerò s la generica distanza del baricentro della sezione della trave incastrata rispetto al punto di giunzione con l'altra porzione di trave.
Per chiarire come vengono determinate le caratteristiche di sollecitazione , risulta comodo utilizzare viste in 2D.

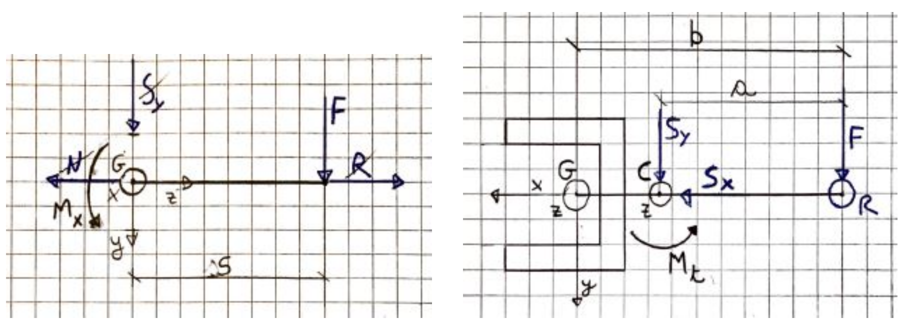

Figure 5: Vista della trave sul piano YZ e XY

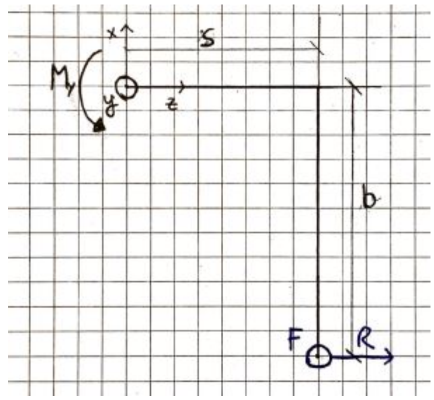

Figure 6: Vista della trave sul piano XZ

Determino N, S_y e S_x imponendo l'equilibrio alla traslazione lungo l'asse z, y e x

$$N = -R \tag{7}$$

$$S_y = -F \tag{8}$$

$$S_x = 0 \tag{9}$$

Determino M_x e M_y imponendo l'equilibrio alla rotazione attorno all'asse x e all'asse y passante per il baricentro G (G, x) e (G, y)

$$M_x = Fs \tag{10}$$

$$M_y = -Rb \tag{11}$$

Determino M_t imponendo l'equilibrio alla rotazione attorno all'asse z passante per il centro di taglio C (C, z)

$$M_t = Fa \tag{12}$$

La struttura caricata è rappresentata in figura 7.

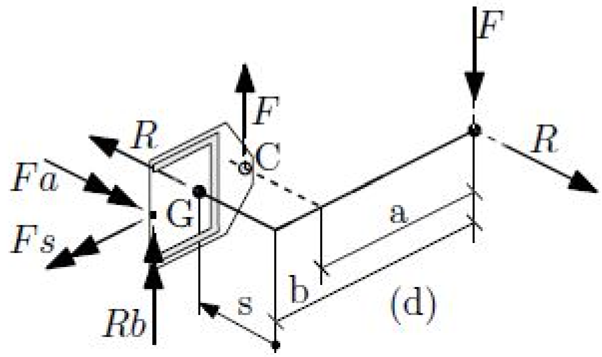

Figure 7: Struttura caricata

Esempio di struttura labile e iperstatica allo stesso tempo. Determinare la labilità, o meno, di una struttura è fondamentale per l'utilizzo dei programmi FEM. E' possibile che una struttura sia allo stesso tempo iperstatica e labile?
Si prenda, per esempio, un corpo in 2D vincolato con due carrelli. Questo vincolamento riduce i gradi di libertà da 3 a 1. Se si aggiunge un terzo carrello, non si esclude la possibilità che questo corpo possa risultare labile. Infatti se si posiziona il carrello in modo tale per cui il suo asse, normale al piano di scorrimento, sia passante per il punto di intersezione degli assi degli altri due carrelli, ottengo una struttura che apparentemente è isostatica, ma in realtà è sia labile che iperstatica.
Questo accade perché i vincoli non sono indipendenti fra di loro.
Se si applica una coppia M al corpo, i vincoli non generano una coppia che contrasti la coppia applicata e inevitabilmente il corpo inizierà a ruotare, il carrello aggiunto è quindi un vincolo inefficace, cioè non impedisce alcun moto di corpo rigido ancora consentito dagli altri vincoli.
Allora, la struttura risulta labile.

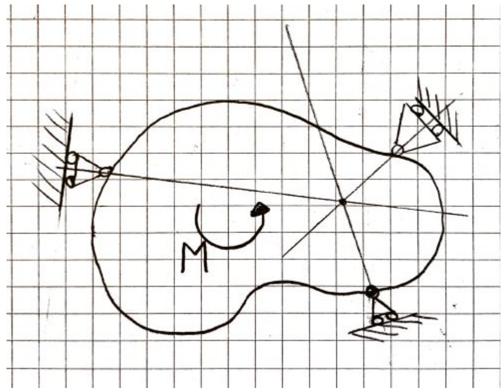

Figure 8: Struttra labile

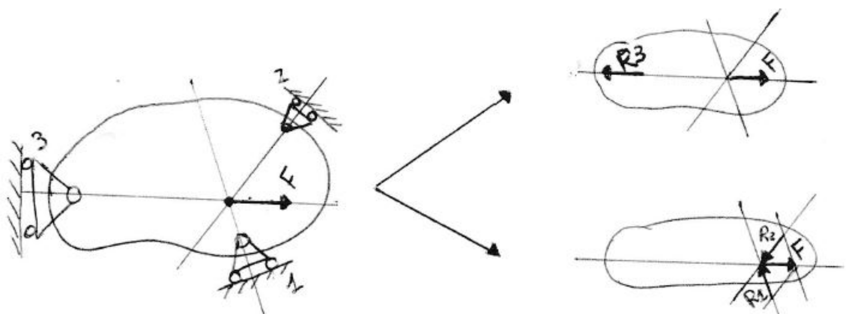

Figure 9: Struttura iperstatica

Invece, applicando una forza F nel centro di rotazione, agente lungo l'asse di uno dei carrelli, risulta impossibile determinare le reazioni vincolari tramite l'imposizione dell'equilibrio a traslazioni e rotazioni. Infatti, esistono diverse reazioni vincolari che portano all'equilibrio di corpo rigido, come è possibile vedere in figura 9.
Un metodo empirico per determinare se un vincolo è indipendente dagli altri (e quindi effettivamente utile), è quello di chiedersi se il vincolo che vado ad aggiungere tolga o meno un moto di corpo rigido prima permesso.
Quindi conviene aggiungere un vincolo alla volta e valutarne o meno l'efficacia.
La figura 10 è un esempio di vincolamento efficace.

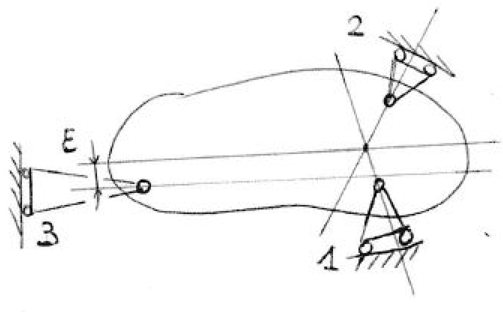

Figure 10: Esempio di vincolamento efficace