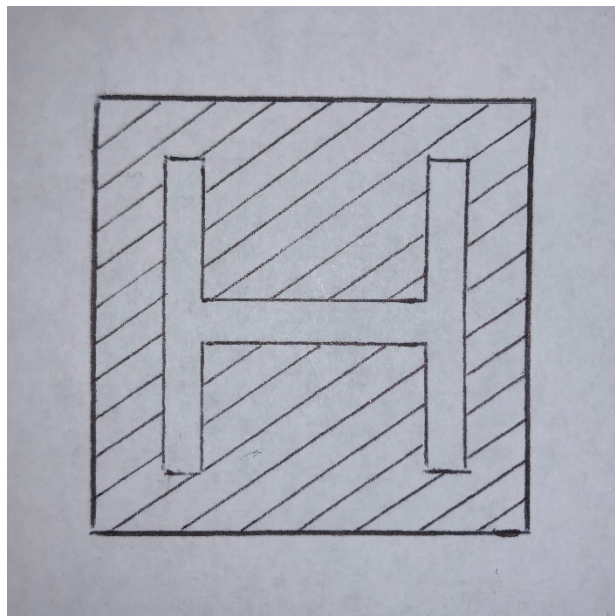


## **Torsione a sezione sottile aperta: commento dei risultati**

*Si riprende la trattazione della lezione precedente.*

Si è visto che da una parte la sezione è infinitamente più cedevole dell'equivalente sezione chiusa, infatti rendendola aperta con un piccolo taglio, la rigidezza scende di circa 2-3 ordini di grandezza. Tuttavia questa perdita di rigidezza è visibile se il warping viene lasciato libero ovunque sulla trave ed in particolare sui terminali.

Per lasciare libero il warping al terminale sono necessarie operazioni complesse, come ad esempio creare una specie di maschera (piastra) con un foro corrispondente all'entità della sezione (*Figura seguente*), inserendo questa maschera in prossimità del terminale e assumendo il contatto tra la superficie della maschera con il terminale della sezione.



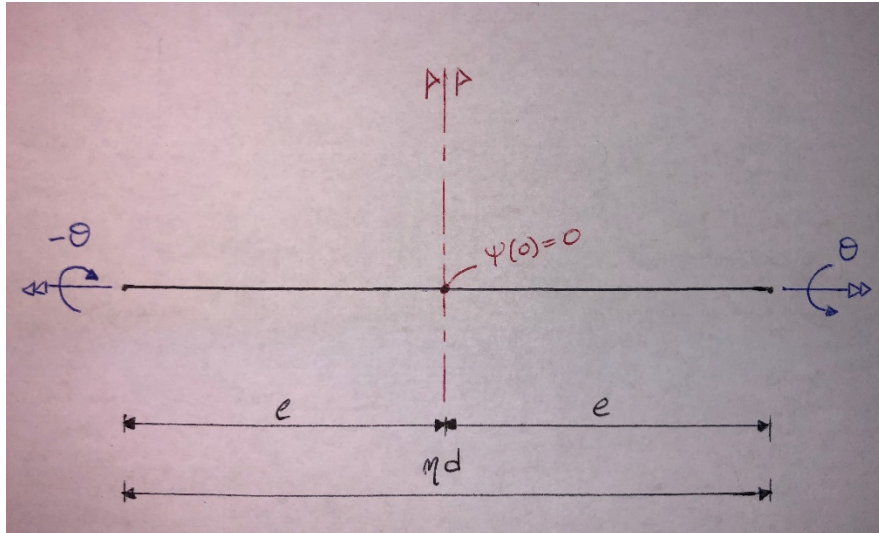
*Maschera del profilato a doppia T*

Applicando la coppia attraverso la maschera e supponendo che ci sia attrito ammissibile tra le superfici di contatto, si trasmette la coppia senza inibire il warping. Questo tipo di cinematismo non è implementabile per le grosse strutture, tuttavia in realtà questo oggetto viene vincolato saldandolo in testa ai terminali così da non lasciare libero il warping. Andando a bloccare il warping in strutture sottili aperte si nota un rilevante recupero di rigidezza (circa 1 ordine di grandezza). Le formule analitiche viste fino ad ora valgono per warping libero, nel caso in cui lo si impedisce portano ad un errore di circa un ordine di grandezza.

Viene introdotta la trattazione del warping per sezioni a doppia T, in quanto permette di isolare due ali, che si comportano come due travi a flessione, semplificando notevolmente la trattazione.

Osservando la struttura a doppia T deformata sul fianco (*Figura seguente*), si nota come le due ali deformino a flessione con un abbassamento parallelo a loro stesse da una parte e un innalzamento parallelo a loro stesse dall'altra.

Schematizzando:



*Profilo cumulativo antisimmetrico*

Il profilo cumulativo è un oggetto antisimmetrico. Un estremo ruota di un angolo  $\theta$  mentre l'altro di  $-\theta$ . La sezione è caratterizzata da una rigidezza costituita da due contributi: una secondo De Saint-Venant pari a  $GK_T$  ( $K_T$  costante di rigidezza torsionale), e una secondo la teoria della torsione a warping impedito che si riduce ad avere un modulo  $E$  in direzione assiale, rilevante ai fini di come lavora il materiale, che ricaviamo da  $\sigma_z = E_z \varepsilon_z$ . Se il materiale è isotropo,  $E$  risulta essere il modulo di Young.

La rigidezza, dunque, è data dal prodotto:

$$E_z C_w$$

dove  $C_w [mm^6]$  è una costante caratteristica della forma della sezione. Utilizzando questi parametri possiamo andare a definire una lunghezza caratteristica  $d$  secondo Vlasov, che permette di adimensionalizzare il problema:

$$d = \sqrt{\frac{E_z C_w}{G K_T}}$$

Si può definire la lunghezza totale fisica della struttura come prodotto  $\eta d$ , quindi da estremo a estremo ci saranno  $\eta$  lunghezze caratteristiche.

Mediante passaggi di tipo cinematico che legano il twist della sezione con gli spostamenti verticali delle ali, si giunge all'equazione differenziale di quarto grado, dove la funzione incognita stessa è l'andamento sezione per sezione della rotazione attorno all'asse  $z$ ,  $\psi(z)$ :

$$0 = -d^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (1)$$

In prossimità dell'antisimmetria si avrà  $\psi(0) = 0$  poiché è l'origine dell'asse  $z$ . Dopo aver adimensionalizzato la lunghezza del profilato con la lunghezza caratteristica  $d$ , si adimensionalizzano le coppie mediante una coppia nominale che è quella che otterrei applicando la teoria del De Saint-Venant. Definisco il rateo di twist:

$$r = \frac{d\psi}{dz} \left[ \frac{\text{rad}}{\text{mm di lunghezza}} \right]$$

che rappresenta la velocità con la quale ruotano le sezioni, ovvero una curvatura torsionale.

Per la teoria del De Saint-Venant il parametro  $r$  assume un valore costante, mentre nel caso di Vlasov si considera:  $r = \left[ \frac{d\psi}{dz} \right]_{\text{medio integrale}}$ .

Da questa si ottiene la coppia nominale, che risulta essere:  $T_0 = GKr$ .

Nota l'equazione differenziale di quarto grado si ricava la forma generale delle soluzioni che contiene sia termini simmetrici che antisimmetrici, ma essendo il problema in esame antisimmetrico considero solo i termini antisimmetrici. Quindi una generica funzione di rotazione torsionale delle sezioni,  $\psi(z)$ , assume la forma:

$$\psi(z) = C_1 \sinh\left(\frac{z}{d}\right) + C_3 \frac{z}{d} \quad (2)$$

dove la coordinata  $z$  è adimensionalizzata sulla lunghezza caratteristica, ai fini dell'effetto Vlasov. La lunghezza caratteristica è una proprietà della sezione e del materiale, essendo il materiale isotropo il rapporto tra  $E$  e  $G$  è fisso.

Sostituendo (2) in (1), si trova l'identità  $0 = 0$  che garantisce che la funzione è soluzione dell'equazione differenziale per ogni valore dei parametri  $C_1$  e  $C_3$ .

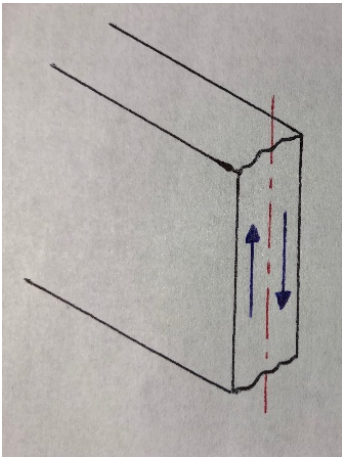
Si definiscono dopodiché le condizioni al contorno, in particolare due poiché si hanno due costanti ( $C_1$  e  $C_3$ ). La condizione che, la rotazione deve essere nulla in mezzeria, è già implicita nell'aver scelto i termini antisimmetrici della soluzione, quindi questa non viene presa in considerazione.

La prima condizione è data per  $z = l$ :

$$\psi(l) = r l$$

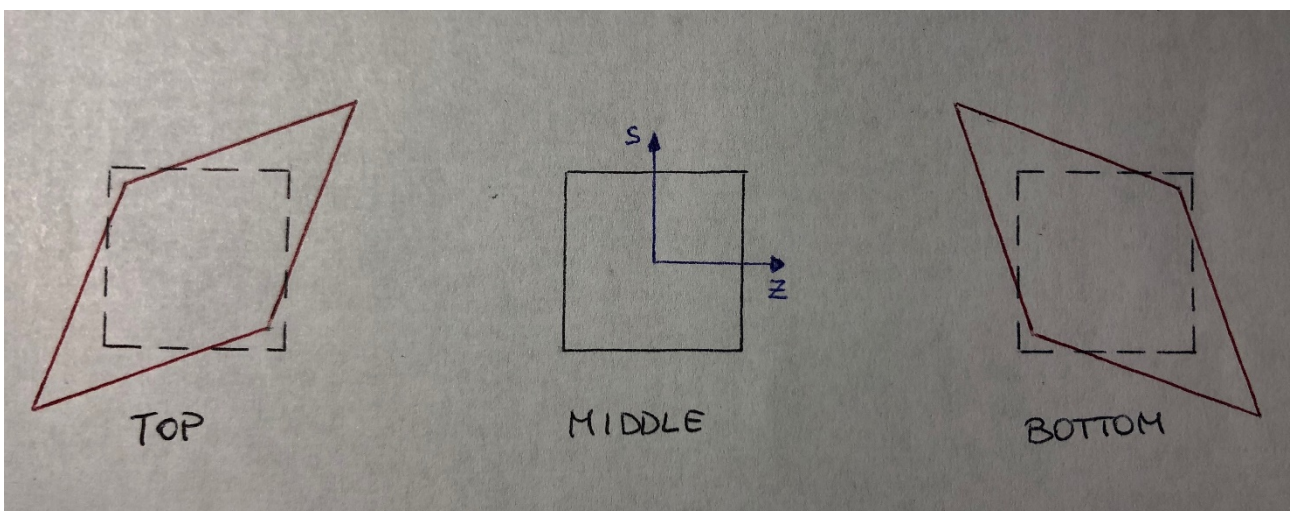
dove  $l$  è la lunghezza lungo la quale il rateo viene accumulato.

La seconda condizione è legata al fatto che all'estremo ( $z = l$ ) non ci può essere warping. Dai testi di riferimento si ricava che l'assenza di warping porta ad imporre  $\frac{d\psi}{dz} = 0$ , che significa avere localmente un moto di corpo rigido. Questa condizione è stata motivata da Vlasov che ha costruito questa teoria per sezioni sottili aperte.



L'ala del nostro profilato va a caricarsi secondo uno stato tensionale-deformativo che ha componente membranale nulla, ossia l'unica componente di deformazione di quella piastra è a curvatura mista  $K_{xy}$ , pertanto il piano medio rimane indeformato.

Rappresentando un piano medio quadrato orientando l'asse  $s$  lungo la parete delle ali, si nota come quest'ultimo rimane indeformato; la superficie TOP della stessa superficie di cui fa parte il piano medio assume una forma romboidale deformata; analogamente la superficie BOTTOM è deformata in maniera opposta come mostrato sotto in figura. Nel MIDDLE abbiamo che la  $\gamma_{sz}$  (deformazione tagliante entro piano) è pari a 0. Questo vale solo nel MIDDLE per le sezioni aperte a sezione sottile.



L'espressione di  $\gamma_{sz}$  è data da:

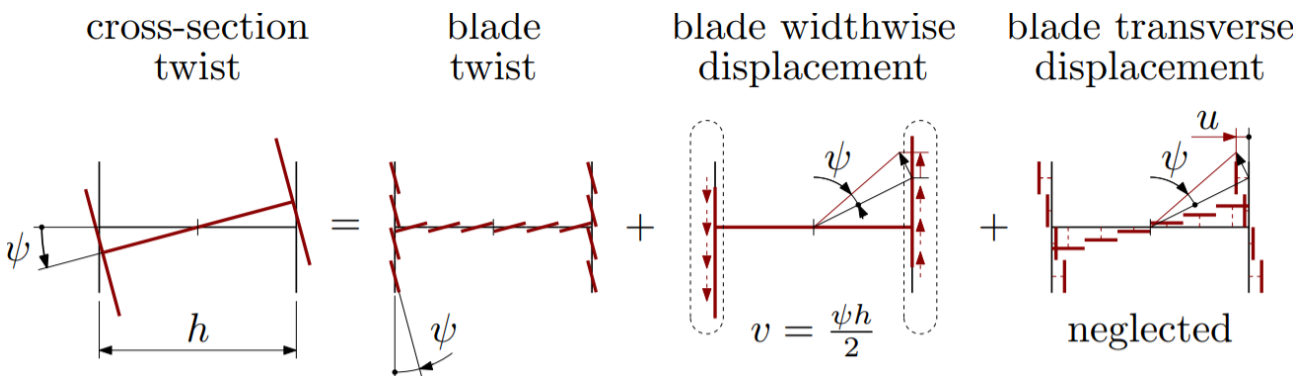
$$\gamma_{sz} = \frac{dw}{ds} + \frac{du_s}{dz} \quad (3)$$

Imponendo warping nullo, in quella sezione, lo spostamento  $w$  (moto fuori piano di sezione) è pari a 0 ( $w = 0$ ) e pertanto nullo anche ai terminali, di conseguenza anche la derivata prima di  $w$  sarà nulla, cioè il primo termine della (3).

Quindi semplificando la (3) si ha:

$$\gamma_{sz} = \frac{du_s}{dz}$$

I punti che si trovano sulla stessa ala si muovono con lo stesso moto, quindi la traslazione  $u_s$  è legata cinematicamente con l'angolo  $\psi$  tramite il braccio  $\frac{h}{2}$ , quindi si può esprimere  $u_s = \frac{\psi h}{2}$ .



Sostituendo nella (3) si ha che:

$$\gamma_{sz} = 0 + \frac{h}{2} \frac{d\psi}{dz} = 0$$

Dunque dovrà necessariamente essere  $\frac{d\psi}{dz} = 0$ , pertanto l'assenza di warping la si associa ad un punto stazionario della funzione  $\psi$ .

Si definiscono, dunque, le due equazioni al contorno nel listato Maxima:

☐ imposed rotation at the  $z=1$  terminal

```
--> eq1 : psi(1)=r*1;
(%07)  $\frac{C3 \eta}{2} + C1 \sinh\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{d \eta r}{2}$ 
```

☐ due to skew-symmetry, the  $z=-1$  terminal counterrotates of an equal angle

☐ imposed zero warping at the  $z=1$  terminal (and also at  $z=-1$  due to skew-symm.)

```
--> diff(psi(z),z,1);
eq2 : ev(%0,z=1);
(%08)  $\frac{C1 \cosh\left(\frac{z}{d}\right)}{d} + \frac{C3}{d}$ 
(%09)  $\frac{C1 \cosh\left(\frac{\eta}{2}\right)}{d} + \frac{C3}{d} = 0$ 
```

Avendo queste due equazioni lineari in  $C_1$  e  $C_3$ , con il comando *linsolve* vengono ricavati i loro valori specifici.

Di fatto la soluzione scala linearmente con il rateo di twist ed è funzione soltanto del parametro  $\eta$ , lunghezza della trave misurata in quantità di lunghezze caratteristiche da estremo a estremo.

Dopo aver trovato le due costanti  $C_1$  e  $C_3$  si definisce completamente l'andamento di  $\psi(z)$  derivando le quantità di interesse; in particolare la quota parte di momento torcente trasmesso mediante De Saint-Venant, pari a  $GK_T \frac{d\psi}{dz}$ , e la quota parte di momento torcente trasmesso come azione tagliante sulle ali.

☒ **solution**

```
--> linsolve([eq1,eq2],[C1,C3],globalsolve=true;
```

(%o10) 
$$\left[ C1 : - \frac{d \eta r}{\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) \eta - 2 \sinh\left(\frac{\eta}{2}\right)}, C3 : \frac{d \cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) \eta r}{\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) \eta - 2 \sinh\left(\frac{\eta}{2}\right)} \right]$$

```
--> psi(z);
```

(%o11) 
$$\frac{\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) \eta r z}{\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) \eta - 2 \sinh\left(\frac{\eta}{2}\right)} - \frac{d \eta r \sinh\left(\frac{z}{d}\right)}{\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) \eta - 2 \sinh\left(\frac{\eta}{2}\right)}$$

☒ **torsional moments, De Saint Venant and Vlasov portions**

```
--> T_dSV : G*K*diff(psi(z),z,1);
T_Vla : - (d^2)*G*K*diff(psi(z),z,3);
```

(%o12) 
$$G K \left( \frac{\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) \eta r}{\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) \eta - 2 \sinh\left(\frac{\eta}{2}\right)} - \frac{\eta r \cosh\left(\frac{z}{d}\right)}{\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) \eta - 2 \sinh\left(\frac{\eta}{2}\right)} \right)$$

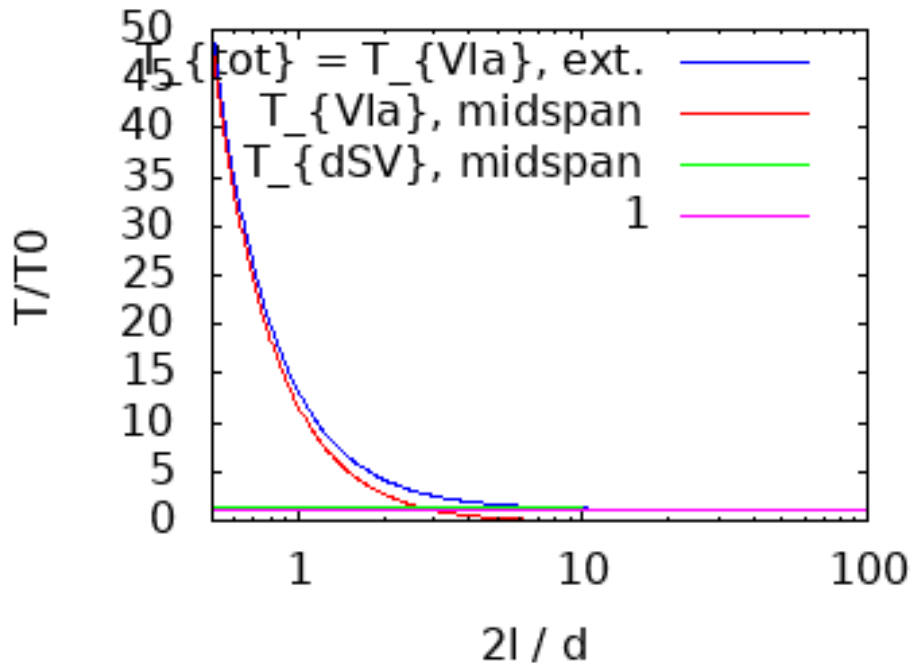
(%o13) 
$$\frac{G K \eta r \cosh\left(\frac{z}{d}\right)}{\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right) \eta - 2 \sinh\left(\frac{\eta}{2}\right)}$$

Il momento torcente totale è dato dalla somma di questi due contributi:

$$T_{tot} = T_{dsv} + T_{vla}$$

Successivamente, nel foglio di calcolo maxima si è implementato un comando per plottare le quattro curve utili a fornire informazioni tali per commentare i risultati.

### Torsional stiffening and torque components



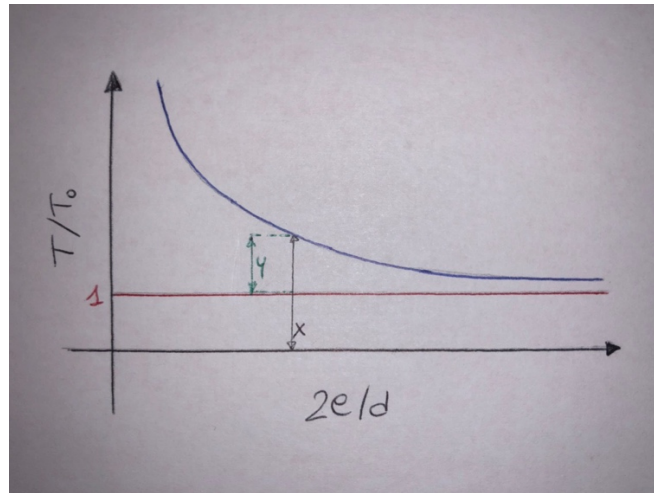
La prima curva rappresenta  $T_{tot}$ , con  $\frac{d\psi}{dz} = 0$  ai terminali, per cui il contributo riferito a De Saint-Venant non viene considerato in quanto nullo.

La seconda curva rappresenta il momento torcente  $T_{Vla}$  all'antisimmetria.

La terza curva rappresenta il momento torcente  $T_{dsv}$  all'antisimmetria.

L'ultima, invece, è una retta costante in 1 come riferimento poiché si adimensionalizzano tutti i momenti torcenti rispetto ad uno nominale, ovvero quello associato al solo De Saint-Venant.

Come si osserva nel listato maxima sono stati utilizzati valori di  $\eta$  che vanno da 0.5 a 100 (travi lunghe da  $\frac{d}{2}$  a  $100d$ ), e per spaziare tale entità di travi si utilizza una scala logaritmica per le ascisse del grafico. Tra le quattro curve, quella più interessante è quella rappresentata in blu ovvero  $\frac{T_{tot}}{T_{dsv}}$ , in quanto nel momento in cui tale curva si avvicina al riferimento 1 la teoria del De Saint-Venant funziona, mentre quando si distacca dal riferimento abbiamo un irrigidimento rispetto alla teoria del De Saint-Venant, che è dato dal rapporto tra le due lunghezze  $\frac{x}{y}$  come mostrato nella figura successiva.



I grafici riportati sono stati ricavati per la sezione a doppia T, ma i risultati ottenuti valgono per tutti i tipi di sezioni sottili aperte.

L'ultima parte del foglio di calcolo è dedicata ad impostare una procedura iterativa di tipo Newton al fine di calcolare il valore di  $\eta$  (si rimanda al listato maxima caricato dal professore sul wiki).

Riferendosi alla sezione quasi chiusa della lezione precedente, avendo un irrigidimento di 53 volte, si amplifica il grafico per valori di  $\eta$  che variano tra 0.4 e 100. Considerando l'altezza della sezione pari a 120 mm e l'irrigidimento (RWSF) si adopera la procedura iterativa tramite un ciclo *for*, che permette di ricavare il valore esatto di  $\eta$  pari, nel caso in esame, a 0.48. Con tale valore ottenuto, che rappresenta la lunghezza della trave in numero di lunghezze caratteristiche, si può derivare, considerando la lunghezza totale della struttura, la lunghezza caratteristica  $d_{vLa} = 2497.7 \text{ mm}$ , che risulta essere un valore enorme, infatti pari a 20 volte la dimensione della sezione.

Per poter applicare la teoria del De Saint-Venant a queste strutture, trascurando l'effetto Vlasov, la lunghezza della trave deve essere molto maggiore del valore calcolato di  $d_{vLa}$ , di almeno 10÷20 volte. Per cui la trave in esame dovrebbe avere un profilato lungo 200÷400 volte la dimensione della sezione. Nella realtà non vengono utilizzate dimensioni di trave così elevate, pertanto la teoria di De Saint-Venant non viene applicata a codeste strutture, mentre l'effetto di Vlasov risulta essere sempre rilevante.

Per le sezioni sottili chiuse, invece, si trova che la lunghezza caratteristica sulla quale si misura la potenziale influenza dell'effetto Vlasov risulta essere minore rispetto alla dimensione ricavata per sezioni sottili aperte.

Inoltre sul listato Maxima si può vedere come scalano le tensioni assiali  $\sigma_z$ .

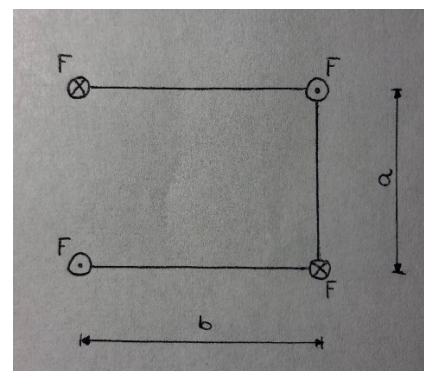
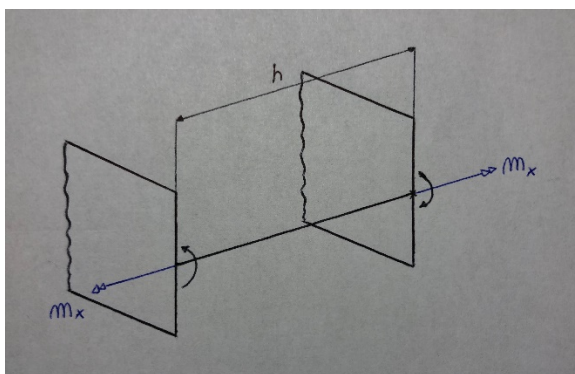


Sapendo che le tensioni assiali scalano linearmente col twist rate medio integrale e con la coppia applicata, si va successivamente a studiare come tali tensioni scalano al variare della lunghezza del profilato.

La caratteristica di sollecitazione che scala le tensioni assiali  $\sigma_z$  dovuta agli estremi con warping non è né momento torcente, né momento flettente sul profilato, ma si tratta di un oggetto che viene chiamato *Bimomento*. Nel caso di sezione a doppia T è possibile attribuire al *Bimomento* un senso fisico, infatti si può considerare un'ala soggetta a un momento  $M_x$ , mentre l'altra ad un momento uguale ed opposto.

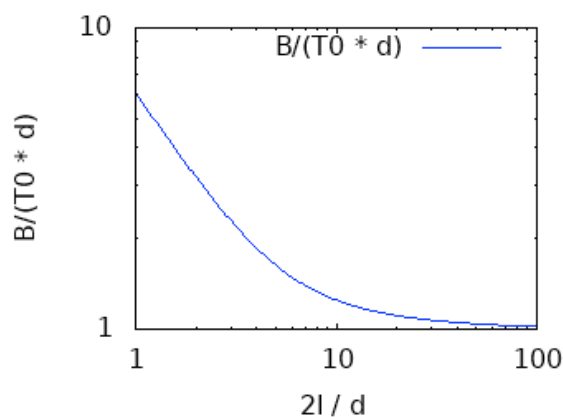
La distanza tra i due momenti è pari ad  $h$ , quindi posso definire il *Bimomento* come un momento di ordine superiore dato dal prodotto di  $M_x$  per il braccio  $h$ . Quest'ultimo può anche essere visto come un oggetto associabile a quattro forze disposte ai lati di un rettangolo, due delle quali uscenti e le altre due entranti, con risultante nulla.

In generale i Bimomenti decadono rapidamente lungo la trave se ci si allontana dal loro punto di applicazione, quindi agli estremi assume valore massimo, mentre è nullo all'antisimmetria.



Dal grafico su Maxima, implementato mediante le formule della teoria di Vlasov, si può vedere l'entità di questo oggetto, sul quale scalano le tensioni assiali in funzione di quanto è lunga la trave in lunghezza caratteristica  $d$ .

Scaling factor for the Vlasov induced stress comps at end:



## Teoria degli elementi finiti

Si riprende l'elemento isoparametrico a 4 nodi rappresentando una porzione quadrilatera di piastra di un corpo in parete sottile; i gradi di libertà che definiscono il moto della piastra sono gli spostamenti  $x, y, z$  e le rotazioni attorno a  $x, y$  ed eventualmente la rotazione di drilling attorno all'asse  $z$ .

Si è derivato che dalle leggi di interpolazione si possono calcolare gli spostamenti e rotazioni per punti interni sulla superficie di riferimento, in funzione degli spostamenti e rotazioni nodali; in più si hanno le leggi della cinematica della piastra che implicano che le deformazioni variano linearmente lungo lo spessore. Mettendo insieme tutte queste caratterizzazioni di natura cinematica si può trovare il valore delle deformazioni in ogni punto lungo lo spessore della piastra, mediante:

$$\underline{\epsilon} = \underline{\bar{\epsilon}} + z \underline{k}$$

Esplicitando tutti i termini, si ha:

$$\underline{\epsilon}(\xi, \eta, z) = \left[ \underline{H}^T \underline{Q}(\xi, \eta) \quad \underline{0} \quad z \underline{H}^T \underline{Q}(\xi, \eta) \right] \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{w} \\ \underline{\theta} \\ \underline{\varphi} \end{bmatrix}$$

In forma più compatta, il vettore deformazione assume tale forma:

$$\underline{\epsilon}(\xi, \eta, z) = (\underline{B}_0(\xi, \eta) + \underline{B}_1(\xi, \eta)z) \underline{d}$$

Analogamente si può ricavare una relazione simile tra spostamenti e rotazioni nodali e deformazioni taglianti fuori piano. Anche in questo caso si ha una matrice che premoltiplica le componenti nodali e dà componenti di deformazione di taglio fuori piano. La deformazione  $\epsilon_z$  si ricava puramente per effetto Poisson (da  $\epsilon_x$  e  $\epsilon_y$ ) e dunque risulta essere indipendente da  $\gamma_{zx}$  e  $\gamma_{zy}$ . Da queste deformazioni moltiplicate per la matrice  $\underline{D}$  (3x3) si ottengono le componenti di tensioni entro piano.

Le componenti entro piano possono essere derivate in funzione di  $\epsilon$  in questo modo:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \left[ \underline{D} \right] \underline{\epsilon}(\epsilon, \eta, z)$$

Si ottengono quindi le tensioni  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  in ogni punto lungo la piastra, caratterizzate dalle coordinate  $\epsilon, \eta$  e  $z$ .

In realtà tali componenti sono quantità medie in  $z$ , quindi risulta:

$$\overline{\gamma_{zx}} = \overline{\gamma_{zx}}(\epsilon, \eta)$$

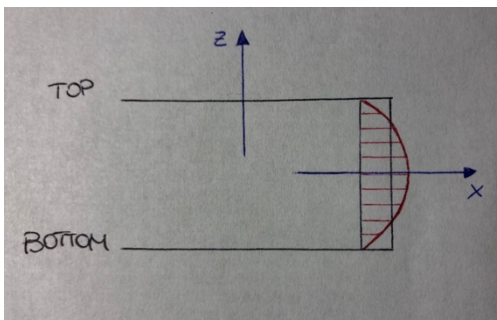
Si nota pertanto che tale quantità non dipende da  $z$  poiché la formulazione cinematica non è abbastanza complessa da poter estinguere i diversi valori di  $z$  di quella quantità. Una problematica che insorge a riguardo è quella di associare la  $\tau_{zx}$ , poiché si dovrebbero avere  $\gamma_{zx}$  e  $\gamma_{yz}$  puntuali cioè funzione di  $\epsilon, \eta$  e  $z$ , cioè definite punto per punto. Quindi si otterrebbe:

$$\begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{zx} & 0 \\ 0 & G_{yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{zx}(\epsilon, \eta, z) \\ \gamma_{yz}(\epsilon, \eta, z) \end{bmatrix}$$

dove  $G$  è il modulo di taglio; mentre la matrice relativa a tale quantità viene definita come matrice delle  $\gamma$  fuori piano, chiamata  $\underline{\underline{D}}\gamma$ .

Nel caso considerato, invece, le  $\gamma$  sono medie e non sono costanti ma variano ad ogni  $z$ , poiché si devono annullare tra TOP e BOTTOM per la continuità delle superfici di Brendt.

In particolare:



Le  $\tau_{zx}$  si annullano infatti in corrispondenza delle due superfici. Come per la trave a sezione rettangolare, poi, le  $\tau$  sono uniformi con forma parabolica.

Se viene imposto che la  $\tau_{zx}$  sia uguale ad una costante per una  $\gamma$  costante vi risulterà una distribuzione mediamente equivalente alla precedente, che però viola l'ipotesi di  $\tau$  nulla su TOP e BOTTOM.

Viene stabilito pertanto, mediante varie considerazioni che non vengono trattate in questo corso, che dando un valore a quella  $\bar{\tau}$  media per andare a dimensionare la distribuzione rettangolare equivalente di una distribuzione che nasce parabolica nella teoria esatta; quindi viene presa una  $\bar{\tau}$  media così definita:

$$\overline{\tau_{zx}} = \frac{6}{5} G_{zx} \overline{\gamma_{zx}} \quad (4)$$

Nel caso di materiale lastra omogeneo, linearmente elastico, una legge del materiale energeticamente consistente per le componenti fuori piano può essere ottenuta scrivendo la relazione sforzo-deformazione punto a punto.

$$\begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{D}}\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{zx} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

Per le considerazioni fatte in (4), si può scrivere quindi:

$$\begin{bmatrix} \overline{\tau_{zx}} \\ \overline{\tau_{yz}} \end{bmatrix} = \left( \frac{6}{5} \underline{\underline{D}} \gamma \right) \begin{bmatrix} \overline{\gamma_{zx}} \\ \overline{\gamma_{yz}} \end{bmatrix}$$

dove la matrice D viene corretta per rappresentare l'energia potenziale elastica lungo tutto lo spessore da TOP a BOTTOM, e viene definita come:  $\underline{\underline{D}} \gamma = \left( \frac{6}{5} \underline{\underline{D}} \gamma \right)$ .

In particolare risulta correttamente che, se si definisce la  $\tau_{zx}$  come appena visto ed analogamente la  $\tau_{yz}$  con i loro rispettivi moduli di taglio G e con  $\gamma$  nella direzione relativa, l'energia potenziale elastica per unità di area di piastra sarà data da:

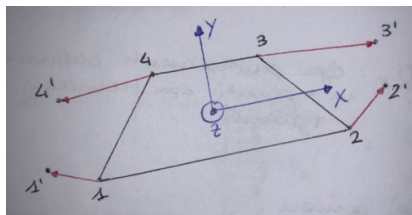
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_z \gamma_{zx} \tau_{zx} + \gamma_{yz} \tau_{yz} dz &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \overline{\gamma_{zx}} \\ \overline{\gamma_{yz}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \overline{\tau_{zx}} \\ \overline{\tau_{yz}} \end{bmatrix} h \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \overline{\gamma_{zx}} \\ \overline{\gamma_{yz}} \end{bmatrix}^T \underline{\underline{D}} \gamma \begin{bmatrix} \overline{\gamma_{zx}} \\ \overline{\gamma_{yz}} \end{bmatrix} h. \end{aligned}$$

Quindi il fattore  $\frac{6}{5}$  può essere definito come un fattore che scala l'integrale rispetto alla relazione che viene fuori mediante vettori. Questo fattore è utilizzato per correggere la matrice solo nel caso in cui il materiale sia uniforme, poiché nel caso in cui non lo fosse vi sarà un fattore più complesso da tenere in considerazione.

Quindi, in conclusione, il rapporto tra  $\tau$  e  $\gamma$  non è quello nativo ma viene corretto da un fattore che sistema l'accumulo di energia da TOP a BOTTOM lungo lo spessore. A questo punto, si hanno tensioni definite per la quota parte entro piano e deformazioni definite per la quota parte tagliante fuori piano. Pertanto mettendo insieme tutte le informazioni ricavate, si passa a trovare la relazione elastica di un elemento a spostamenti imposti, definita tramite la matrice di rigidità.

Si considera un elemento piastra, nello spazio fisico XYZ con forma arbitrariamente irregolare.

### CONFIGURAZIONE INDEFORMATA



Anziché considerare un sistema globale orientato arbitrariamente viene preso un sistema fisico centrato sul centroide orientando z in direzione uscente.

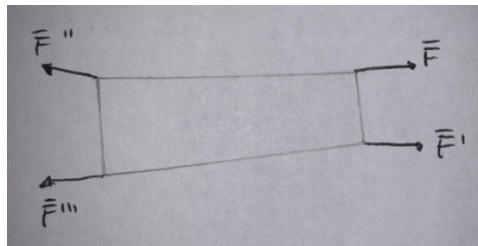
Si definisce un arbitrario vettore che descrive gli spostamenti e rotazioni alle funzioni nodali:

$$\underline{d}^T = [\underline{u}^T \quad \underline{v}^T \quad \underline{w}^T \quad \underline{\theta}^T \quad \underline{\varphi}^T]$$

$$\underline{d}^T = [(u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4)^T \quad (v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4)^T \quad (w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4)^T \quad (\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4)^T \quad (\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \varphi_4)^T]^T$$

Si suppone ci siano degli spostamenti ai nodi che deformano l'elemento (in figura), in più si hanno rotazioni e spostamenti z non rappresentabili.

### CONFIGURAZIONE DEFORMATA



Tale configurazione si ottiene sommando alle coordinate del nodo originario le coordinate dovute agli spostamenti. Tale elemento mantiene questa configurazione deformata mediante delle forze e coppie esterne applicate su ogni nodo. Ciascuna di esse avrà 3 componenti lungo x, y e z e vengono raccolte nel vettore  $\underline{F}^T = \begin{bmatrix} \underline{U}^T & \underline{V}^T & \underline{W}^T & \underline{\theta}^T & \underline{\psi}^T \end{bmatrix} = \underline{F}(\underline{d})$ . Qualora si voglia considerare il moto di drilling viene inserito anche il vettore  $\underline{\psi}$ .

Supponendo un comportamento lineare dell'elemento, il legame tra  $\underline{F}$  e  $\underline{d}$  sarà lineare, ovvero  $\underline{F} = \underline{K} \underline{d}$ . La matrice  $\underline{K}$  è una matrice quadrata 24x24 (considerando il drilling) e, per motivi di conservatività del legame, è simmetrica e reale; mentre il vettore  $\underline{d}$  contiene i gradi di libertà del sistema.

Per ricavare questa matrice  $\underline{K}$  si sfrutta il principio dei lavori virtuali, ovvero una volta deformato l'elemento tramite il vettore  $\underline{d}$  si perturba ulteriormente la forma dell'elemento aggiungendo degli spostamenti virtuali  $\delta \underline{d}$ , che rappresentano degli spostamenti infinitesimi compatibili con i vincoli. Gli spostamenti e le rotazioni devono seguire la legge di interpolazione bi-lineare e inoltre bisogna rispettare la cinematica della piastra. Considerando una reazione dell'elemento di tipo elastico alla deformazione  $\underline{d} + \delta \underline{d}$ , si dovrebbe avere una quantità di forza pari a  $\underline{F} + \delta \underline{F}$  al fine di mantenere tale deformazione. Tuttavia i termini introdotti da  $\delta \underline{F}$  sono infinitesimi di ordine superiore e quindi trascurabili, dunque la variazione  $\delta \underline{d}$  è talmente piccola da non influenzare  $\underline{F}$ .

Con l'aggiunta di  $\delta \underline{d}$  le forze esterne compiono lavoro e quindi ricaviamo il lavoro virtuale delle forze esterne:

$$\delta Q_e = \delta \underline{d}^T \underline{F}$$

Inoltre compiono lavoro anche le tensioni interne sulle deformazioni, che a seguito della perturbazione sono pari a  $\underline{\epsilon} + \delta \underline{\epsilon}$ , dove:

$$\delta \underline{\epsilon} = (\underline{\underline{B}}_0(\xi, \eta) + \underline{\underline{B}}_1(\xi, \eta)z) \delta \underline{d}$$

Le componenti di tensione sono le componenti di deformazione per la matrice di legame costitutivo entro piano e quindi:

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{D}}(z) (\underline{\underline{B}}_0(\xi, \eta) + \underline{\underline{B}}_1(\xi, \eta)z) \underline{d}$$

Pertanto questo lavoro è detto lavoro virtuale interno che non è altro che l'integrale sul volume della densità volumica di lavoro virtuale interno:

$$\delta Q_i^\sigma = \iint_A \int_h \delta \underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} dz dA$$