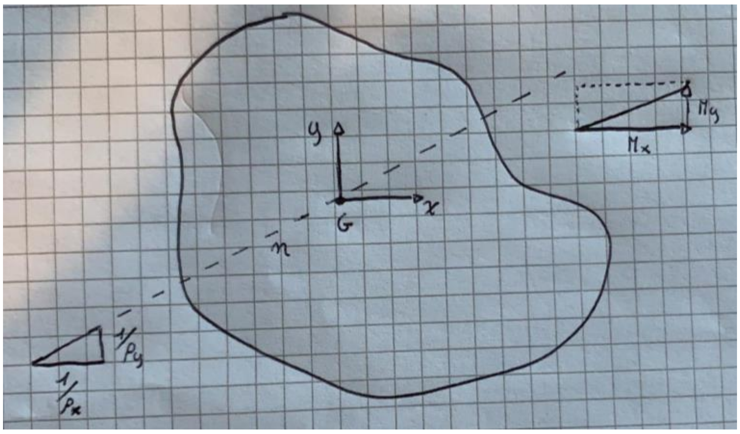
TRAVE SOTTOPOSTA A FLESSIONE

(proseguo lezione del 14/03)

La trave è sottoposta a un momento flettente M di componenti Mx e My. Essa reagisce sviluppando due curvature, una lungo x e una lungo y.



Si assume che l'asse neutro sia baricentrico e la direzione definita da due componenti: $1/\rho x$ e $1/\rho y$. Notiamo che l'asse neutro non è parallelo alla direzione del momento, qualora lo fosse quella direzione sarebbe principale d'inerzia. Nel 2D ciò accade sempre poiché la sezione viene considerata simmetrica rispetto al piano del foglio. Nel 3D prendo Mx e My e le inserisco nella formulazione di $1/\rho x$ e $1/\rho y$.

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{\mathcal{M}_x \overline{EJ}_{yy} + \mathcal{M}_y \overline{EJ}_{xy}}{\overline{EJ}_{xx}\overline{EJ}_{yy} - \overline{EJ}_{xy}^2} \qquad \frac{1}{\rho_y} = \frac{\mathcal{M}_x \overline{EJ}_{xy} + \mathcal{M}_y \overline{EJ}_{xx}}{\overline{EJ}_{xx}\overline{EJ}_{yy} - \overline{EJ}_{xy}^2}$$

Scrivendo queste due relazioni sotto forma matriciale risulta che:

$$\lambda \begin{bmatrix} \mathcal{M}_x \\ \mathcal{M}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_x} \\ \frac{1}{\rho_y} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\overline{EJ}_{xx}\overline{EJ}_{yy} - \overline{EJ}_{xy}^2} \begin{bmatrix} \overline{EJ}_{yy} & \overline{EJ}_{xy} \\ \overline{EJ}_{xy} & \overline{EJ}_{xx} \end{bmatrix}}_{[\overline{EJ}]} \begin{bmatrix} \mathcal{M}_x \\ \mathcal{M}_y \end{bmatrix}$$

Da questa relazione si evince l'uguaglianza tra $1/\rho$ e il momento M tramite un paramento λ.

$$\lambda \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{EJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix}$$

Moltiplico per la matrice identità e noto che posso ricondurre la scrittura a un problema di autovalori e autovettori.

$$\lambda I \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} = [\overline{EJ}] \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix}$$

$$\left([\overline{EJ}] - \lambda [I] \right) \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} = \emptyset$$

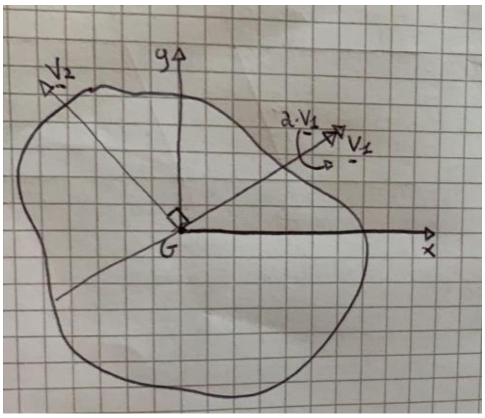
$$\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}} \right) \underline{v} = 0$$

Quindi le direzioni principali d'inerzia si riescono a trovare impostando un problema di autovalori e autovettori in cui λ è un autovalore. La **v** mi indica in direzioni x e y la direzione principale.

$$(\lambda_1, \underline{v}_1) \qquad \lambda_1 \equiv \frac{1}{\overline{EJ}_1}$$

$$(\lambda_2, \underline{v}_2) \qquad \lambda_2 \equiv \frac{1}{\overline{EJ}_2}$$

Gli autovettori risultano essere ortogonali tra loro.



Se applico un momento a$\mathbf{v}_1$ ottengo una curvatura:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{a \cdot \|\underline{v}_1\|}{EJ_1}$$

Se applico solo questo sono sicuro che non c’è nessuna curvatura per $\mathbf{v}_2$.