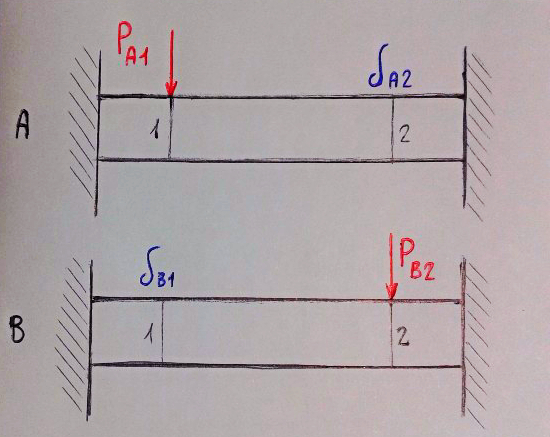
*ASSEMBLAGGIO E VINCOLAMENTO DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA*

Come già specificato nella precedente lezione, una delle principali proprietà della matrice di rigidezza è quella di essere simmetrica; si dimostra ciò attraverso il teorema di Betti: 

“Si considerino due sistemi equilibrati di forze A e B; il lavoro che le forze del primo sistema A sugli spostamenti causati da B è uguale al lavoro che le forze del sistema B compiono sugli spostamenti prodotti da A”.

Da cui l’espressione matematica: *PA,1δB,1= PB,2δA,2*

Tornando perciò all’espressione della matrice di rigidezza:

Considerando separatamente i due sistemi A e B posso allora dedurre:

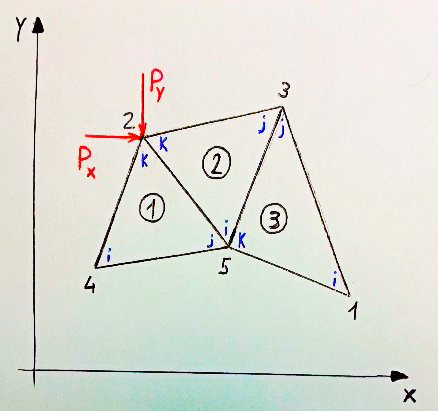
*Sistema A*:δi=0, ma δ2≠0. Ad esempio allora: *F5 =k52δ2*

*Sistema B*:δi=0, ma δ5≠0. Ad esempio allora: *F2 =k25δ5*

Applico a questo punto il teorema di Betti sui due sistemi: F5δ5= F2δ2;

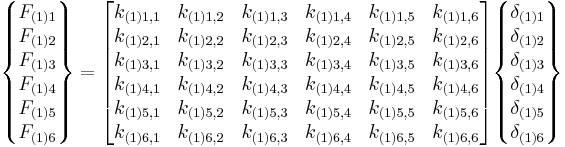
sostituisco le espressioni di F5 ed F2 ricavate precedentemente: *k52 δ2* *δ5=k25 δ5* δ2. Per rispettare l’uguaglianza, potendo eliminare da entrambi i membri il prodotto *δ2* *δ5, deve allora necessariamente essere k52= k25.*

*Ciò, esteso a tutti i termini della matrice, è equivalente alla proprietà di simmetria: kij= kji (i≠j).*

A questo punto si introduce l’idea di assemblare tra loro un numero finito di elementi triatre, in modo da comporre una semplice struttura; in particolare, nella figura di fianco, sono rappresentati tre elementi finiti triangolari **1,2,3** e cinque nodi 1,2,3,4,5.

Come si vede in figura, ogni elemento triangolare presenta i vertici indicati da tre indici. Procedendo in senso antiorario, al primo diamo il nome **i**, al secondo **j** e al terzo **k**. Inseriamo inoltre i tre elementi in un sistema di riferimento x,y per poter procedere alla scrittura delle equazioni di equilibrio; un certo carico **P** agisce inoltre sul nodo 2 (in figura sono state rappresentate le sue componenti **Px e Py**).

Il legame tra forze e spostamenti per l’elemento 1 si può scrivere come:



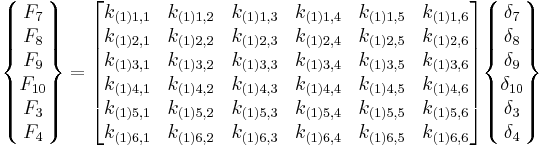
(1) indica le grandezze relative all’elemento 1;

Tenuto conto della numerazione interna all’elemento (ossia i nomi **i,j,k** assegnati in senso antiorario ai vertici), ci si chiede cosa rappresenti, ad esempio, la forza F(1)3.

Come già specificato nelle precedenti lezioni, un singolo vertice può, nel piano, traslare lungo x e lungo y. Si assegnano perciò, per convenzione, numeri dispari agli spostamenti lungo x (1,3,5,…) e numeri pari agli spostamenti lungo y (2,4,6,…); si deduce perciò che per ogni nodo è possibile scrivere al massimo due relazioni scalari, in particolare quella indicata da pedice dispari sarà lungo x, e lungo y se indicata da pedice pari. In definitiva è possibile rispondere al quesito posto precedentemente: F(1)3 è una forza nodale lungo x del secondo vertice (j) dell’elemento 1.

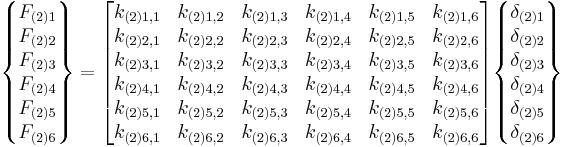
Pertanto, come **regola generale per la codifica basata sui nodi**, è possibile dire che, essendo **n** un **generico nodo**, il **grado di libertà lungo x** è associato all'indice **2\*(n)-1** mentre il **grado di libertà lungo y** è associato all'indice **2\*(n)** (Nota: in questo modo si conserva la suddivisione fra indici pari e dispari come esposta in precedenza).

Lo stesso tipo di ragionamento va fatto per gli spostamenti, ovvero per il vettore colonna https://cdm.ing.unimo.it/.mediawiki/images/math/f/1/0/f10f03c9836c36537d2539196058bfa2.png. In questo modo, possiamo riscrivere, per esempio, le espressioni in forma codificata; per l'elemento **1** si ha:

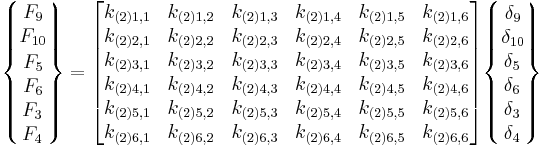


Dove, ad esempio: F(1)1 diventa, essendo 4 il nodo cui corrisponde (i) secondo la numerazione del solo elemento 1: F2\*4-1 = F7.

Analogamente è possibile scrivere il legame tra forze e spostamenti per l’elemento 2:



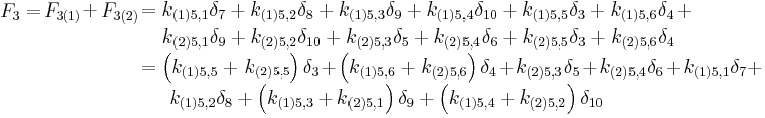
(2) in questo caso identifica le grandezze relative all’elemento 2. Utilizzando allora le regole di codifica precedenti possiamo riscrivere le espressioni:



Andiamo, quindi, a definire l'equazione di equilibrio della forza in direzione x, al nodo 2; andranno considerati i contributi sia dell'elemento **1** sia del **2**. La forza risultante sarà la reazione opposta dalla struttura alla componente del carico in direzione x Px:

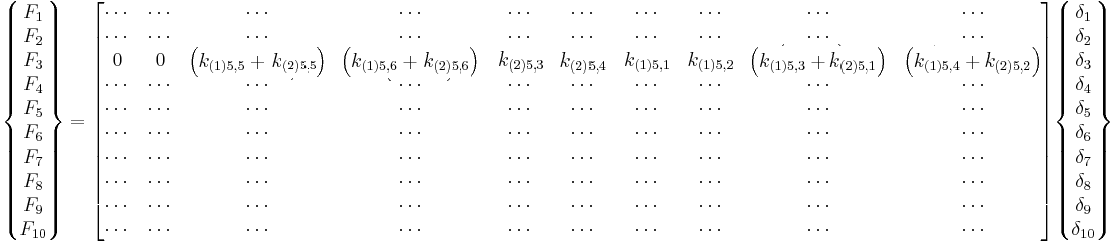
C:\Users\Andrea PC\Desktop\UNIVERSITA'\VEICOLO MODENA\Progetto del Telaio\bacd65761c97d723cc66aecfa78639a6.png

Sommando allora le due componenti:



E’ interessante notare come, nella rappresentazione della forza F3 quale somma delle due componenti, 4 spostamenti su 10 moltiplicano la somma di rigidezze sia del primo che del secondo elemento: ciò accade esattamente nei nodi 2 e 5, dove i due elementi considerati vengono a contatto).

Complessivamente allora la matrice di rigidezza sarà una 10 x 10 (2\*n x 2\*n, con n numero di nodi); il legame tra forze e spostamenti può allora essere espresso nel seguente modo (riporto nella matrice solamente la riga corrispondente alla forza F3):



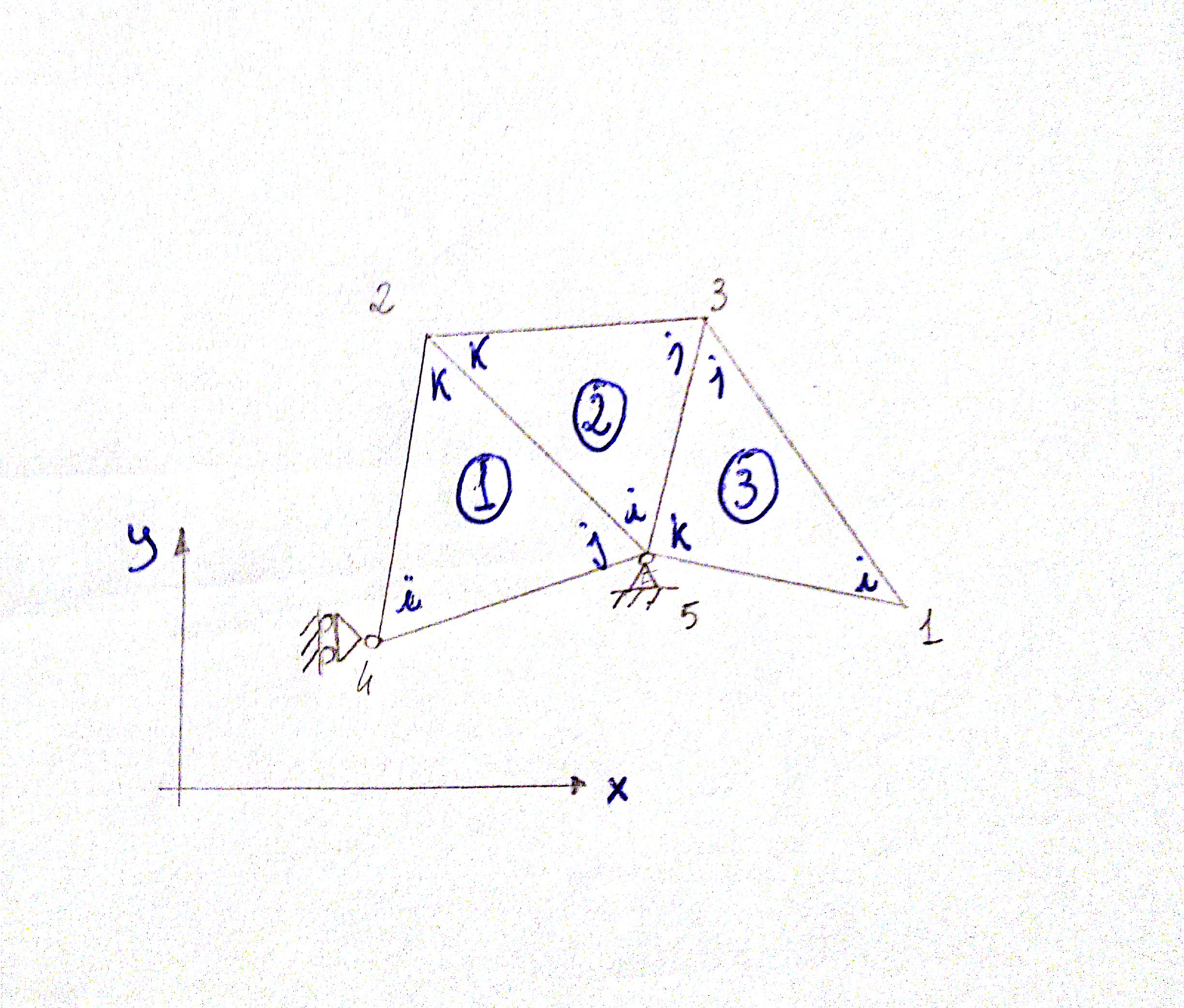
Ritornando ora alla matrice di rigidezza relativa all'elemento 1, si può osservare come l'elemento k(1)5,1 sia caduto nella terza riga – settima colonna della matrice di rigidezza globale, cioè nell'elemento k3,7. Infatti:

si può notare come la quinta **riga** della matrice sia riferita allo spostamento lungo x del nodo 2 (-->**3**) e la prima **colonna** allo spostamento lungo x del nodo 4 (-->**7**); ne consegue k3,7.

Quindi si è visto come passare da una numerazione locale alla numerazione globale: conoscendo la connettività dei nodi tramite la circuitazione iniziamo a scrivere la matrice di rigidezza (ovviamente cambiando l'ordine degli indici i,j,k dei vertici di ogni elemento cambierà anche la matrice di rigidezza).

Idealmente (anche per ottimizzare la memoria allocata) vorremmo avere una matrice BANDATA, ovvero una matrice i cui elementi si “schiacciano” verso la diagonale principale: ci saranno molti zeri lontani dalla diagonale e si va a memorizzare solo la banda. Nel caso in esame questa operazione è complicata dalla presenza di due elementi (k1,10 e k10,1) che stanno agli antipodi rispetto alla diagonale principale.

Quello che si deve fare è il vincolamento del sistema, vale a dire la rimozione delle labilità: si inserisce quindi un carrello al nodo 4 e una cerniera al nodo 5



L'introduzione di questi vincoli si traduce nella scrittura delle seguenti equazioni di congruenza:

1. CARRELLO: δ7=0 e δ8≠0
2. CERNIERA: δ9,10=0

*VINCOLAMENTO: CARRELLO*

Nell'eseguire l'operazione di vincolamento è fondamentale che gli spostamenti **δi** restino **incogniti**: si agisce quindi modificando la matrice di rigidezza globale e il vettore delle forze nodali. Scriviamo la componente della forza lungo x agente sul nodo 4:

F7=k7,1δ1+...+k7,7δ7+...+k7,10δ10

si può pensare di imporre F7=0 e k7,i=0 ∀ i≠7; risulterà

0=k7,7δ7 ⇿ δ7=0

Nel fare questa operazione risulta subito evidente che si è persa la simmetria della matrice; si procede quindi annullando anche la settima colonna per recuperarla (non perdiamo la generalità del problema dato che i ki,7 saranno tutti moltiplicati per δ7=0).

Per terminare il vincolamento carrello si deve considerare che il nodo 4 lungo y è libero di muoversi; si può quindi pensare di imporre δ8=δ\*. Scriviamo F8

F8=k8,1δ1+...+k8,8δ8+...+k8,10δ10

procedendo analogamente si annulla l'ottava riga (e colonna) ottenendo F8=k8,8\*δ8=1\*δ\*  da cui ne consegue k8,8=1 e δ8=δ\*. Come al solito gli spostamenti sono le incognite del nostro studio e quindi si modifica il vettore forze nodali

Annullare l'ottava colonna è lecito solo “truccando” i coefficienti dei termini noti; cioè si avrebbe

F1=k1,1δ1+...+k1,8δ8+...+k1,10δ10 con δ8=δ\* quindi

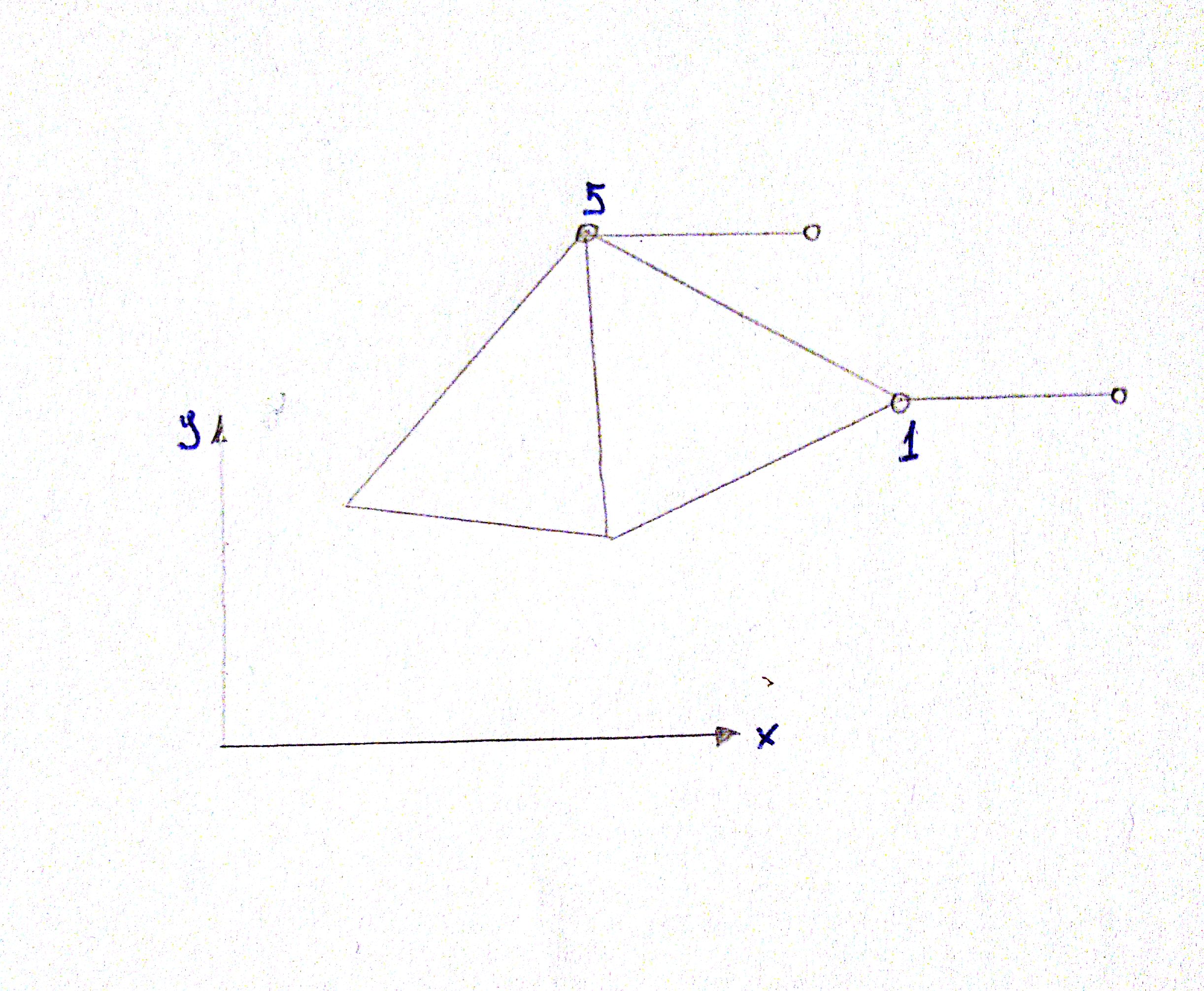
F1-k1,8δ\*= k1,1δ1+...+0\*δ8+...+k1,10δ10

In conclusione il sistema F=k\*δ con il vincolo carrello risulta

In maniera del tutto analoga si procede per il vincolo cerniera al nodo 5.

Quindi togliere i moti rigidi del sistema in questione significa andare a perturbare la matrice di rigidezza globale che diventerà quindi invertibile: la FISICITA' consiste nel cambio del determinante che diventa non nullo.

*INTRODUZIONE AI LINK*



I LINK sono strumenti che legano direttamente i gradi di libertà. Nell'esempio di figura l'applicazione dei link implica δ1= δ5 (collegamento diretto tra 2 DOF). Risulta evidente che i link sono degli strumenti molto utili: ad esempio, pensando ad una biella, si può evitare di eseguire la meshatura e mettere direttamente un link; inoltre i link possono essere utilizzati anche per legare tra loro 2 carichi.

PROBLEMA: i link aggiungono delle equazioni che potrebbero rendere il sistema non risolvibile.