QUADRATURA GAUSSIANA ELEMENTO ISOPARAMETRICO 4 NODI

Vogliamo calcolare le componenti della matrice rigidezza per un elemento isoparametrico a 4 nodi(*):

$$\underline{K} = t \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \underline{B}^T (\xi, \eta) \underline{D}\, \underline{B}(\xi, \eta) | \underline{J}(\xi, \eta) | d\xi d\eta$$

Tale integrale è risolvibile in forma analitica, ma vogliamo trovare una soluzione numerica che possa ridurne il peso computazionale: tra i metodi disponibili usiamo la QUADRATURA GAUSSIANA che, a parità di accuratezza, richiede il minimo numero di punti di interpolazione. In generale tale procedimento non fornisce soluzioni esatte, cosa che invece accade se la funzione integranda è un polinomio:

Definendo $n =$ ordine di quadratura gaussiana = numero di punti di campionamento

$$\Downarrow$$

Si ottiene la soluzione esatta di un polinomio di grado $(2n - 1)$

Quindi, considerando un polinomio di grado $(2n - 1)$ e volendone valutare l'integrale con una quadratura gaussiana di ordine m:

$$\begin{cases} \text{se } m = n \implies \text{FULL INTEGRATION} \implies \text{soluzione esatta} \\ \text{se } m < n \implies \text{REDUCED INTEGRATION} \implies \text{soluzione approssimata} \end{cases}$$

La *Reduced Integration* risulta utile per ridurre ulteriormente il peso computazionale dell'integrale, ma nel nostro caso (elemento isoparametrico 4 nodi, $\underline{K}$ definita per via energetica) potrebbe nascondere alcune componenti deformative sotto moti di corpo rigido (nessun contributo in energia potenziale elastica, esempio nel wiki).

Supponiamo di dover integrare una funzione di 1 variabile:

$$\int_{-1}^{1} g(\zeta)\, d\zeta$$

La quadratura gaussiana di ordine n prevede di svolgere l'integrale campionando $g(\zeta)$ in n punti ζ_i e combinando linearmente tali valori, modulandoli con i rispettivi pesi w_i :

(*): le matrici dovrebbero essere indicate come $\underline{\underline{A}}$ e non come $\underline{A}$, scrittura propria di vettori colonna. Tuttavia tale scrittura per le espressioni matematiche risulta particolarmente onerosa in Microsoft World e verranno indicate nel secondo modo. Nella presente trattazione, comunque, non compariranno vettori colonna, di conseguenza, l'interpretazione potrà essere solo quella data.

$$\int_{-1}^{1} g(\zeta)\, d\zeta \cong \sum_{i=1}^{n} w_i g(\zeta_i)$$

Di conseguenza, per poter applicare la procedura occorre preliminarmente individuare i punti di campionamento ζ_i e i pesi w_i .

Dobbiamo per prima cosa adattare il metodo alla funzione in analisi. In $\underline{K}$ è contenuto un integrale doppio, perciò il polinomio approssimante sarà funzione delle 2 variabili ξ e η e la quadratura dovrà essere effettuata in 2 dimensioni:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta) d\xi d\eta \cong \sum_{i=1}^{n_\xi}\sum_{j=1}^{n_\eta} w_i\, w_j f(\xi_i,\eta_j)$$

Usiamo lo stesso ordine di quadratura nelle due direzioni: $n_\xi = n_\eta = n$:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta) d\xi d\eta \cong \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i\, w_j f(\xi_i,\eta_j)$$

Vogliamo ottenere l'integrale esatto della funzione in analisi, quindi dobbiamo impiegare una *Full Integration*. Si tratterà dunque di scegliere il polinomio approssimante $f(\xi,\eta)$ in modo che sia un polinomio di grado pari all'ordine della funzione integranda originale e n di conseguenza.
La funzione di cui valutare l'ordine è $\underline{B}^T\underline{D}\,\underline{B}\,|\underline{J}|$. Sapendo che l'ordine del prodotto di funzioni differenziali è la somma dell'ordine di ognuno di queste, passiamo a calcolare l'ordine di ogni termine:

- $\left|\underline{J}\right| = \left|\underline{J}(\xi,\eta)\right|$: per ipotesi le coordinate del sistema di riferimento fisico, (x, y), e quelle del sistema di riferimento naturale, (ξ,η), sono legate da un'interpolazione di tipo bilineare. Tale trasformazione diventa lineare quando mi muovo su rette a $\xi = cost$ o a $\eta = cost$, fatto sempre verificato per la particolare costruzione del quadrilatero isoparametrico in (ξ,η). Di conseguenza gli elementi di $\underline{J}$ (derivate delle coordinate fisiche rispetto alle naturali) saranno costanti e lo stesso sarà valido per il suo determinante $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow\ ordine(|\underline{J}|) = 0$
- $\underline{D}$ esprime il legame costitutivo in tensione piana, quindi i suoi elementi saranno tutti costanti $\Longrightarrow\ ordine(\ \underline{D}\ ) = 0$
- $\underline{B} = \underline{B}(\xi,\eta) = \underline{H}\ \underline{J}_{INV}^{*}\ \underline{Q}\ (\xi,\eta)$:
  - $ordine(\ \underline{H}\ ) = 0$ perché composta solo da elementi numerici, quindi costanti;
  - $ordine\left(\underline{J}_{INV}^{*}\right) = 0$ per gli stessi motivi già discussi per $\underline{J}$;

- $ordine\left(\underline{Q}\,(\xi,\eta)\right) = 1$ poiché contiene le funzioni forma, bilineari in generale, derivate una volta in ξ o η.

$$\Downarrow$$

$$ordine(\,\underline{B}\,) = 1$$

- $ordine(\,\underline{B}^T) = 1$ poiché contiene esattamente gli stessi elementi di $\underline{B}$.

$$\Downarrow$$

$$ordine\left(\,\underline{B}^T\underline{D}\,\underline{B}\,|\underline{J}|\,\right) = 2$$

Come detto quindi, il grado di $f(\xi,\eta)$ sarà 2 e il valore minimo di n per avere *Full Integration* sarà anch'esso 2. Possiamo ora calcolare punti di campionamento e pesi. Tale procedimento è implementabile al manipolatore algebrico (svolgimento con maxima nel wiki).

Come visto, la quadratura di ordine $n = 2$ mi potrà restituire l'integrale esatto di un polinomio di grado $2n - 1 = 3$. Di conseguenza dovrò sfruttare proprio un polinomio di terzo grado per trovare punti di campionamento e pesi. Inoltre, avendo deciso di discretizzare la funzione lungo direzioni indipendenti ma con stesso ordine di quadratura, posso svolgere questa procedura per una variabile arbitraria potendo poi applicare i risultati in ξ e η.

$$g(\zeta) = a + b\zeta + c\zeta^2 + d\zeta^3$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-1}^{1} g(\zeta)\,d\zeta \cong \sum_{i=1}^{n} w_i g(\zeta_i) = w_1(a + b\zeta_1 + c\zeta_1^2 + d\zeta_1^3) + w_2(a + b\zeta_2 + c\zeta_2^2 + d\zeta_2^3)$$

Per semplicità chiamerò A il termine di sx, B il termine di dx. In questa fase si deve calcolare sia l'integrale esatto (A) che l'interpolazione a due nodi (B). In tal modo possiamo esplicitare il valore del residuo R:

$$R = A - B$$

Come è intuibile, R rappresenterà l'errore commesso nell'approssimare A con B, quindi per ottenere l'integrale esatto dovremo avere:

$$R = 0\ \ \forall\,(a,b,c,d)$$

Tale condizione esprime l'indipendenza del residuo dai coefficienti polinomiali e può essere espressa matematicamente in forma differenziale ottenendo un sistema di 4 equazioni in 4 incognite :

$$\begin{cases} \partial R/_{\partial a} = 0 \\ \partial R/_{\partial b} = 0 \\ \partial R/_{\partial c} = 0 \\ \partial R/_{\partial d} = 0 \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si giunge alle soluzioni cercate:

$$\left(w_1 = 1, w_2 = 1, \zeta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \zeta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$\left(w_1 = 1, w_2 = 1, \zeta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \zeta_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

In entrambi in casi $w_1 = w_2$, quindi si possono usare le due soluzioni indistintamente. Come controllo posso verificare che $R(w_1, w_2, \zeta_1, \zeta_2) = 0$. In tal modo si ottiene, quindi:

$$\int_{-1}^{1} g(\zeta)\, d\zeta = 1 \cdot g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1 \cdot g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Siamo dunque giunti a delle formule fruibili per il nostro caso:

$$\underline{K} = t \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \underline{B}^T(\xi,\eta)\underline{D}\,\underline{B}(\xi,\eta)\left|\underline{J}(\xi,\eta)\right| d\xi d\eta = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} w_i\, w_j f(\xi_i, \eta_j)$$

$$w_i = 1 \;\; \forall i$$

$$w_j = 1 \;\; \forall j$$

Punti di quadratura gaussiana: $\begin{cases} \xi_i = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \\ \eta_j = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

$$\Downarrow$$

$$\underline{K} = t\left[f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$