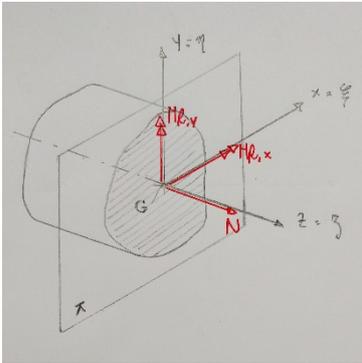
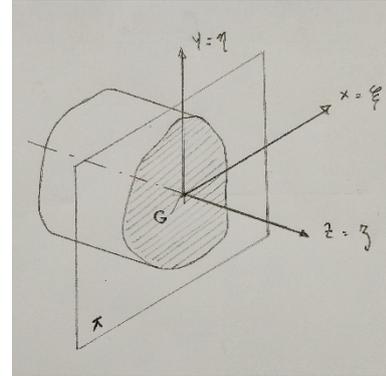


Introduzione

In questa lezione ci concentreremo sull'espressione della *Deformazione lungo ζ della trave*, dove l'asse ζ è quello parallelo all'asse baricentrico della trave stessa, supponendo che la sezione rimanga piana. Per la sezione in questione utilizzeremo un *sistema di riferimento locale ξ, η, ζ* coincidente, per semplicità, con il *sistema di riferimento fisico x, y, z* . La sezione della trave, come visibile in figura, appartiene al *piano π* .



Affinchè la sezione continui ad appartenere al suddetto piano, andiamo a definire lo *Sforzo Normale Baricentrico N* , il *Momento Flettente lungo x $M_{f,x}$* e il *Momento Flettente lungo y $M_{f,y}$* sul piano π . Con queste *Caratteristiche di Sollecitazione* la sezione rimarrà entro piano. Al contrario, applicando alla stessa sezione il *Momento Torcente M_t* , e il *Taglio lungo x e lungo y T_x e T_y* , la sezione non rimarrebbe piana e perciò non li considereremo.

Espressione della “deformazione lungo Z” ε_z

Affinchè la deformazione della sezione considerata resti piana, abbiamo delle deformazioni libere e delle deformazioni vincolate. Le deformazioni libere sono ε_x , ε_y e γ_{xy} , mentre abbiamo vincolate le deformazioni ε_z , γ_{zx} e γ_{yz} .

In linea del tutto generale ε_z può essere vista come somma di tre termini:

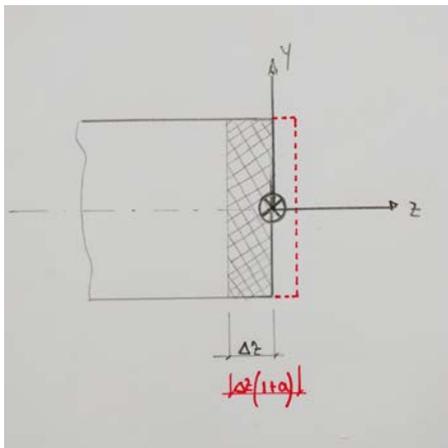
$$\varepsilon_z = a + bx + cy$$

$$\text{con } \gamma_{yz}=0 \text{ e } \gamma_{zx}=0$$

Analizziamo i tre contributi di ε_z separatamente:

- **$\varepsilon_z = a$**

Consideriamo, come visibile in figura, solo la “fetta” della trave di spessore Δz . Questa, in seguito alla deformazione assiale costante, subirà un allungamento $\Delta z \cdot \varepsilon_z = \Delta z \cdot a$,



quindi la lunghezza totale della “fetta” di trave diventerà $\Delta z(1+a)$.

Con le IPOTESI di Stato Monodimensionale di Tensione (pura trazione), Materiale Isotropo e Coefficiente di Poisson ν costante, avremo:

$$\sigma_z = E(x, y) \cdot \epsilon_z = E(x, y) \cdot a ;$$

$$\sigma_x = \sigma_y = 0 ;$$

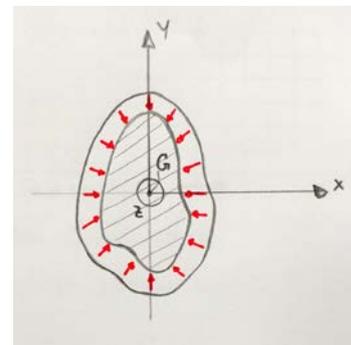
$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 ;$$

Inoltre, come conseguenza dell’*Effetto Poisson*, avremo per le deformazioni libere le seguenti espressioni:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\nu\epsilon_z ;$$

dove il segno meno è dovuto alla strizione

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 ;$$



La Risultante di Sforzo Normale N è definito come:

$$N = \iint \sigma_z dA \Rightarrow N = \iint E(x, y) \cdot a dA = a \cdot \iint E(x, y) dA = a \cdot E_{medio} \cdot A ;$$

e per definizione applicato al Baricentro G . In generale scriviamo le coordinate di G come:

$$x_G = \frac{\iint E(x, y) \cdot x dA}{\iint E(x, y) dA}$$

$$y_G = \frac{\iint E(x, y) \cdot y dA}{\iint E(x, y) dA}$$

Se poi abbiamo un Modulo di Young E uniforme sulla sezione:

$$x_G = \frac{\iint x dA}{\iint dA} ; y_G = \frac{\iint y dA}{\iint dA}$$

- $\varepsilon_z = cy$ (deformaz. lineare in y)

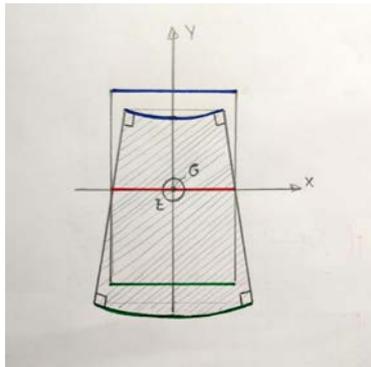
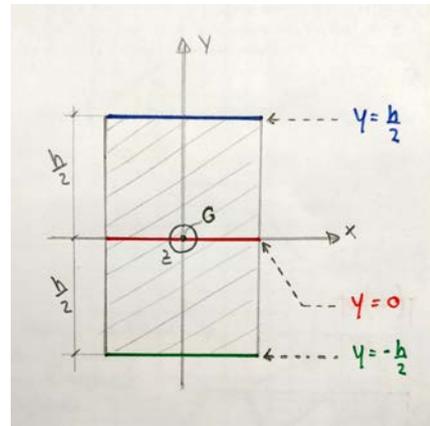
In questo caso la componente assiale di deformazione varia linearmente con la coordinata baricentrica y ; tale condizione è legata ad una curvatura con raggio $1/\rho_x$.

Per semplicità consideriamo una trave a sezione rettangolare. In questo caso, come visibile in figura, la deformazione ε_z varierà con la quota y , assumendo i seguenti valori:

$$\text{per } y = h/2 \rightarrow \varepsilon_z = c \cdot \frac{h}{2}; \varepsilon_x = \varepsilon_y = v \cdot c \cdot \frac{h}{2};$$

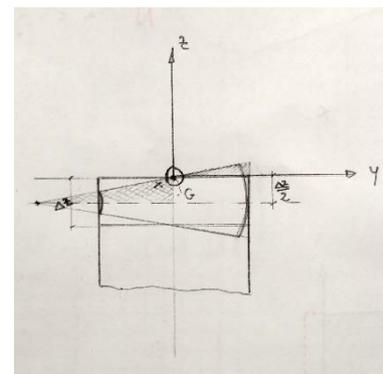
$$\text{per } y = 0 \rightarrow \varepsilon_z = 0; \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0;$$

$$\text{per } y = -h/2 \rightarrow \varepsilon_z = -c \cdot \frac{h}{2}; \varepsilon_x = \varepsilon_y = -v \cdot c \cdot \frac{h}{2}$$



La deformata in prima approssimazione potrebbe sembrare un trapezio, ma in realtà non può esserlo poiché ciò implicherebbe sforzi di tipo tagliente γ_{xy} . Quindi la deformata reale è quella visibile in figura, da notare la conservazione dell'angolo retto.

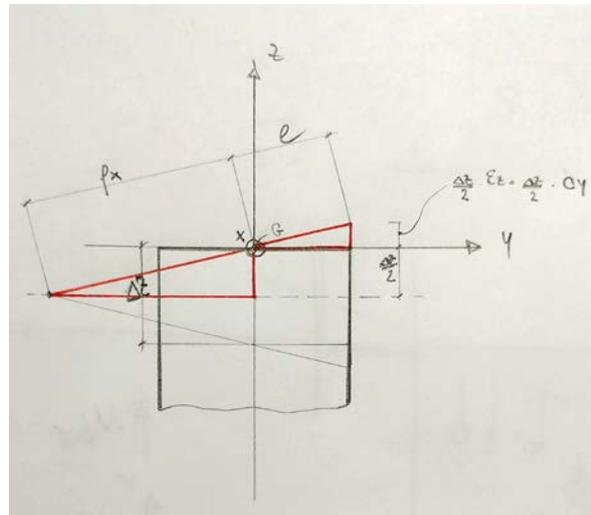
Mettendoci sul piano yz , troviamo il significato fisico del coefficiente c . In seguito alla deformazione è possibile distinguere due triangolo simili, uno con ipotenusa l e cateto minore $\frac{\Delta z}{2} \cdot cl$, e l'altro con ipotenusa ρ_x (raggio di curvatura) e cateto minore $\frac{\Delta z}{2}$.



Dalle proporzioni tra i due triangoli otteniamo la relazione:

$$\left(\frac{\Delta z}{2} \cdot cl\right) : l = \left(\frac{\Delta z}{2}\right) : \rho_x$$

da cui ricaviamo che $c = \frac{1}{\rho_x}$, possiamo dunque indicare con c la *curvatura della deformata*.



La *Caratteristica di Sollecitazione* relativa alla deformazione $\epsilon_z = cy$ sarà:

$$N_c = \iint \sigma_z dA = \iint E(x, y) \cdot c \cdot y dA = 0$$

nulla perché il sistema di riferimento, in particolare y , è baricentrico e i contributi trattivi per $y > 0$ sono compensati dai contributi compressivi per $y < 0$.

Poiché è la curvatura che induce un Momento Flettente e non il contrario, definiamo di seguito i due momenti che agiscono sulla superficie perpendicolare all'asse x :

$$\begin{aligned} M_{c,x} = M_{x,x} &= \iint \sigma_z \cdot y dA = \iint E(x, y) \cdot c \cdot y^2 dA = \iint E(x, y) \cdot \frac{1}{\rho_x} \cdot y^2 dA \\ &= \frac{1}{\rho_x} \cdot E_{medio} \cdot J_{xx} \end{aligned}$$

con $(E_{medio} \cdot J_{xx})$ *rigidezza equivalente*.

$$\begin{aligned} M_{c,y} = M_{x,y} &= \iint \sigma_z \cdot (-x) dA = \iint E(x, y) \cdot c \cdot y \cdot (-x) dA \\ &= \iint E(x, y) \cdot \frac{1}{\rho_x} \cdot y \cdot (-x) dA = -\frac{1}{\rho_x} \cdot E_{medio} \cdot J_{xy} \end{aligned}$$

con $(E_{medio} \cdot J_{xy})$ *rigidezza equivalente*.

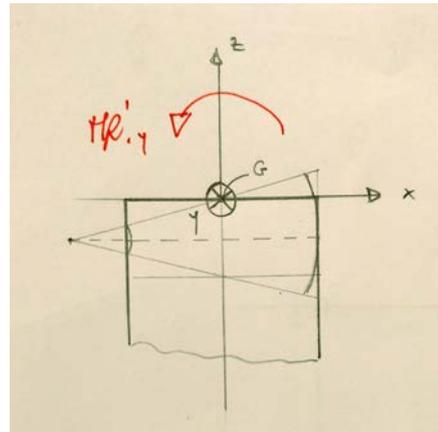
Da notare che $M_{x,y}$ è chiamato *Momento Misto*.

La notazione $M_{c,x}$ indica una componente "x" di momento associata al coefficiente "c" che modula la coordinata y nel definire le deformazioni assiali; la notazione $M_{x,y}$ indica

una componente “y” di momento (notiamo il braccio definito come “-x”, ovvero come distanza con segno dall’asse y) associata ad una curvatura attorno all’asse x (notiamo la deformazione assiale variare linearmente con “y”, ovvero con la distanza dall’asse x); tale momento è denominato momento misto. Allo stesso modo $M_{x,x}$ è una componente “x” del vettore momento indotta da una curvatura in “x”.

- $\varepsilon_z = bx$ (caso lineare in x)

Continuando a considerare la sezione rettangolare con una deformata simile alla precedente (allungamento per $x > 0$ e accorciamento per $x < 0$), osserviamo dalla figura che per il dato sistema di riferimento, otterremo un *Momento Flettente rispetto a y* negativo ($M_{f,y}$ visibile in figura). Per ottenere un $M_{f,y}$ positivo, come definito nel piano π della sezione di trave considerata (vedi introduzione), imponiamo la curvatura $b = -\frac{1}{\rho_y}$.



Poiché, in questo modo, abbiamo le stesse condizioni del caso precedente (deformazione lineare in y), applicando gli stessi passaggi abbiamo le seguenti *Caratteristiche di Sollecitazione*:

$$N_b = \iint \sigma_z dA = \iint E(x,y) \cdot b \cdot x dA = 0$$

$$M_{b,y} = M_{y,y} = \iint \sigma_z \cdot (-x) dA = \frac{1}{\rho_y} \cdot E_{medio} \cdot J_{yy}$$

$$M_{b,x} = M_{y,x} = \iint \sigma_z \cdot y dA = -\frac{1}{\rho_y} \cdot E_{medio} \cdot J_{xy}$$

con $E_{medio} \cdot J_{yy}$ rigidezza equivalente.

- **Deformazione derivante dalle due curvature**

In presenza delle due curvature si applica la sovrapposizione degli effetti per calcolare il *Momento Flettente Totale rispetto a x e y*:

$$\begin{cases} M_{f,x} = 1/\rho_x \cdot (E_{medio} \cdot J_{xx}) - 1/\rho_y \cdot (E_{medio} \cdot J_{xy}) \\ M_{f,y} = -1/\rho_x \cdot (E_{medio} \cdot J_{xy}) + 1/\rho_y \cdot (E_{medio} \cdot J_{yy}) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} M_{f,x} \\ M_{f,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{medio} \cdot J_{xx} & -E_{medio} \cdot J_{xy} \\ -E_{medio} \cdot J_{xy} & E_{medio} \cdot J_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\rho_x \\ 1/\rho_y \end{bmatrix}$$

con $\begin{bmatrix} E_{medio} \cdot J_{xx} & -E_{medio} \cdot J_{xy} \\ -E_{medio} \cdot J_{xy} & E_{medio} \cdot J_{yy} \end{bmatrix}$ *Matrice di Rigidezza Equivalente.*

o **Risalire alla deformazione ε_z noto M_f**

Considerando l'ultima equazione matriciale è possibile risalire alla *curvatura*, ricordando che l'inversa di una matrice 2x2 vale:

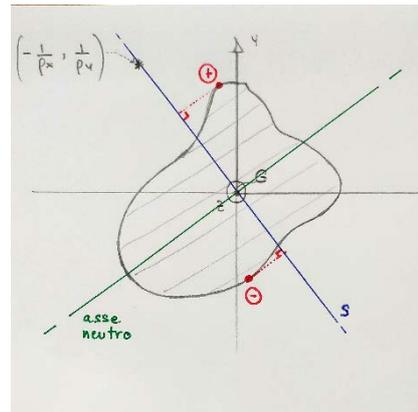
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Ricaviamo quindi il *Vettore Curvatura*:

$$\begin{bmatrix} 1/\rho_x \\ 1/\rho_y \end{bmatrix} = \frac{1}{(E_{medio} \cdot J_{xx}) \cdot (E_{medio} \cdot J_{yy}) - (E_{medio} \cdot J_{xy})^2} \cdot \begin{bmatrix} E_{medio} \cdot J_{yy} & E_{medio} \cdot J_{xy} \\ E_{medio} \cdot J_{xy} & E_{medio} \cdot J_{xx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{f,x} \\ M_{f,y} \end{bmatrix}$$

Adesso possiamo procedere al calcolo della deformazione ε_z :

$$\varepsilon_z(x, y) = \begin{bmatrix} -1/\rho_y & 1/\rho_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



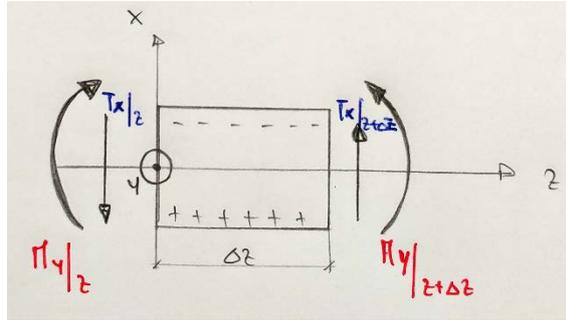
Quindi noto M_f trovo le *curvature*, e da queste traccio la retta s passante per il *baricentro* G e il punto di coordinate $(-1/\rho_y; 1/\rho_x)$. I punti appartenenti alla sezione la cui proiezione su s è massima rispetto a G saranno i punti di massima deformazione. Quindi la retta n perpendicolare a s e passante per G è l'*asse neutro* della sezione.

Introduzione al Taglio

La sollecitazione a *Taglio* induce una variazione di *Momento Flettente*. Consideriamo un concio di trave di lunghezza Δz bidimensionale (con asse z asse della trave) sollecitato a *Taglio*. Per equilibrio alla rotazione avremo due *Momenti* $M_f(z)$ e $M_f(z + \Delta z)$.

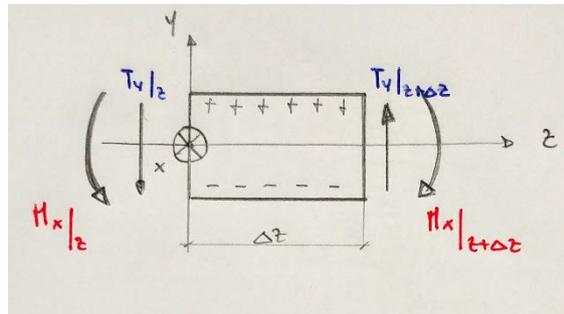
Dall'equilibrio alla rotazione¹ nel caso di *Taglio lungo y* avremo:

$$T_y = \frac{dM_x}{dz}$$



e nel caso di *Taglio lungo x* avremo:

$$T_x = -\frac{dM_y}{dz}$$



Le figure relative al *Taglio* sono state ricavate dalle formule viste a lezione

Nell'IPOTESI di *materiale omogeneo isotropo*, la *tensione* σ_z è funzione di:

$$\sigma_z = f(x, y, M_x, M_y, J_{xx}, J_{yy}, J_{xy})$$

Derivando in funzione di z otteniamo:

$$\frac{d\sigma_z}{dz} = f\left(x, y, \frac{dM_x}{dz}, \frac{dM_y}{dz}, J_{xx}, J_{yy}, J_{xy}\right) = f\left(x, y, T_y, -T_x, J_{xx}, J_{yy}, J_{xy}\right)$$

valido $\forall x, y$ sulla sezione.

Vediamo una correlazione tra il *Taglio* e la *variazione di* σ_z *lungo* z .

¹ Note sulla determinazione dei segni per momento flettente e taglio. Si considera l'estremo del conchio di trave rispetto al quale l'asse z è uscente, ossia l'estremo alla posizione più avanzata in z . Si posiziona in corrispondenza di tale estremo il sistema di riferimento $Gxyz$; sono definiti positivi i tagli T_x e T_y orientati coerentemente con i relativi assi, e sono definiti positivi i momenti M_x e M_y il cui vettore è orientato coerentemente con i detti assi. L'estremo del conchio più arretrato in z avrà componenti di taglio e momento opposti in verso, per equilibrio

Autori e carico orario

Ore dedicate alla stesura/revisione degli appunti di questa lezione².

Autore/Revisore	Prima stesura	Revisione	Seconda stesura	Totale
Alessandro Corticelli	5h			
Federico Ceccolini	5h			
Nicola Rocchia	5h			
Revisore 1				
Revisore 2				
Revisore 3				
Totale	15h			

² La sezione relativa ai revisori è da compilarsi a cura del curatore.