

Introduzione

In questa lezione si tratterà di alcuni richiami di scienza delle costruzioni, si concluderà lo studio della maglia triangolare effettuato col MAXIMA andando a calcolare il coefficiente di correzione presente nella formula dell'energia potenziale. Infine verrà impostata la parte iniziale della simulazione FEM della piastra 4 nodi partendo dalla costruzione della geometria della piastra stessa.

Teorema di Castigliano: richiami

Il teorema di Castigliano permette di risolvere, per vincoli interni, strutture sollecitate da carichi esterni o precaricate internamente.

Si consideri, per esempio, una maglia rettangolare a cui viene applicato un carico P arbitrario, come in Figura 1. Tale maglia è appoggiata su una cerniera e un carrello.

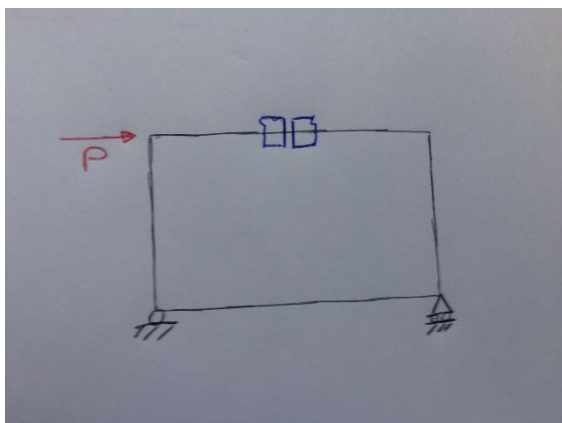


Figura 1: Maglia rettangolare sollecitata da P

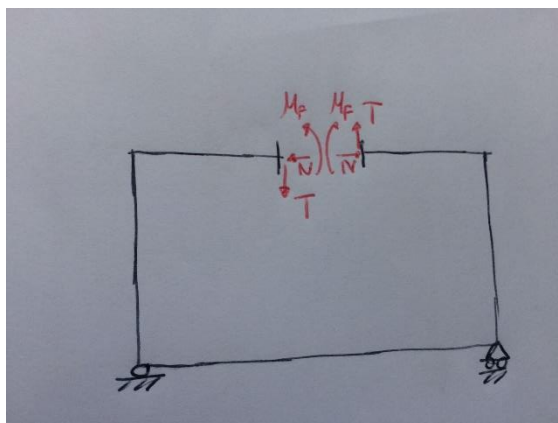
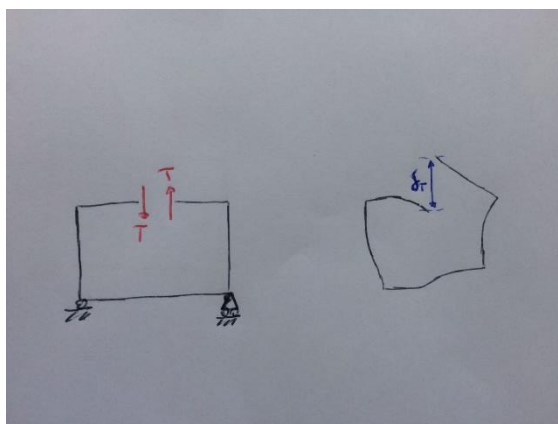
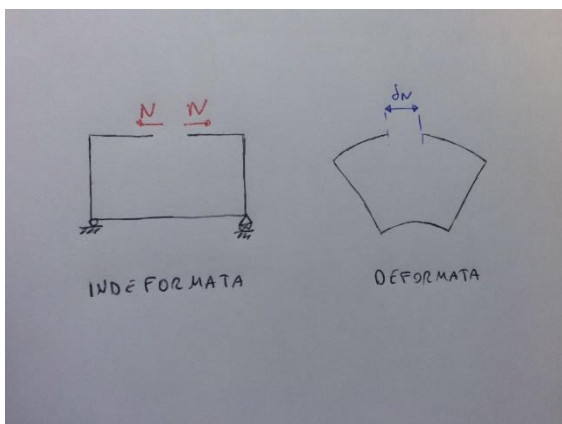


Figura 2: Struttura tagliata e carichi fittizi

Si tagli la struttura in un punto generico -vedi Figura 2- ottenendo così una struttura a maglia aperta che viene studiata attraverso considerazioni di equilibrio; si introducano quindi sei carichi fittizi: un taglio T , uno sforzo normale N e un momento flettente M_f , uguali ed opposti, per ognuna delle due sezioni. Questo garantisce che non ci sia compenetrazione e/o allontanamento tra i due tratti di trave.

Poiché valgono le ipotesi di linearità, è possibile utilizzare il principio di sovrapposizione degli effetti. Si confronta la configurazione indeformata con quella deformata indotta dalle singole componenti di sollecitazione (Figura 3).



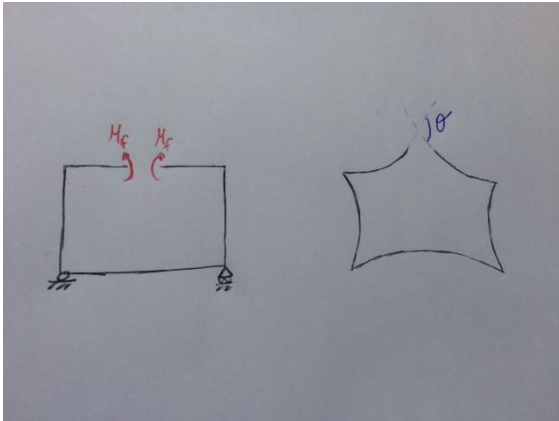


Figura 3: Configurazioni indeformate e deformate della maglia

Si prende innanzitutto lo sforzo normale N . Questo provoca un'apertura della maglia pari a δ_N . Per il teorema di Castigliano δ_N risulta pari a:

$$\frac{\partial U(P, N, T, M_f)}{\partial N} = \delta_N$$

dove $U(P, N, T, M_f)$ è l'energia potenziale elastica che si ricava dalla formula generale di seguito riportata.

$$U = \int_l \frac{M_{f,x}^2 J_{yy} + M_{f,y}^2 J_{xx} + 2M_{f,x} M_{f,y} J_{xy}}{2E (J_{xx} J_{yy} - J_{xy}^2)} + \frac{N^2}{2EA} + \frac{\eta_x T_x^2 + \eta_y T_y^2 + \eta_{xy} T_x T_y}{2GA} + \frac{M_t^2}{2GK_t} dl$$

Analogamente si considera lo sforzo di taglio T e si calcola lo spostamento δ_T della struttura. Questo vale:

$$\frac{\partial U(P, N, T, M_f)}{\partial T} = \delta_T$$

Infine, considerando il momento flettente M_f si determina l'angolo θ come:

$$\frac{\partial U(P, N, T, M_f)}{\partial M_f} = \theta$$

θ rappresenta l'angolo compreso tra le tangenti ai tratti di trave tagliata.

A questo punto, al fine di garantire la continuità del materiale, si impone $\delta_N = \delta_T = \theta = 0$.

Caso reale precaricato

Si consideri ora un caso in cui spostamenti e rotazioni sono diversi da zero. Si prenda una sezione rettangolare realizzata con tubolari a sezione circolare, tagliati a fetta di salame a 45° in corrispondenza degli angoli. A causa degli errori di manifattura si consideri il taglio con una tolleranza di 2° ; ci sarà pertanto un gioco tra le travi estremali. Si forzi il contatto con una dima con ganasce e si saldino tra loro le due travi: si ottiene pertanto una struttura precaricata.

Per garantire la continuità si trasmettano, come nel caso precedente, dei carichi esterni fittizi F_x , F_y e

C_z , come in Figura 4.

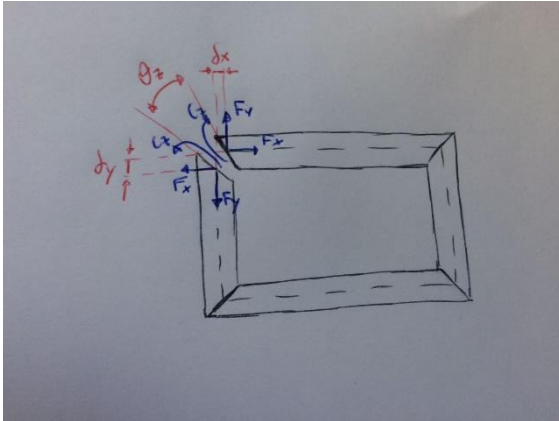


Figura 4: Caso reale con rotazioni e spostamenti diversi da zero

Si applichi nuovamente il teorema di Castigliano e si ricavino i disallineamenti assiali e quello angolare δ_x , δ_y e θ_z , ora diversi da zero. Con delle forchette di tolleranza si valuti quindi il massimo stato di precaricamento.

Maglia triangolare

Si consideri la maglia triangolare esaminata durante la lezione precedente e si analizzi la differenza tra il caso iperstatico iniziale ed il caso isostatico ottenuto introducendo delle cerniere fittizie.

Si utilizza il comando **append** per accodare due liste e il comando **assume** per definire la natura positiva o negativa di alcune grandezze:

```
comando append: accoda due liste in un'unica complessiva
--> append( [ pippo, pluto ] , [ 1, 2, 3 ,paperino ] );
(%o10) [pippo,pluto,1,2,3,paperino]

(%i6) assume( scala > 0 , _mm_>0, _N_>0);
(%o6) [scala>0, _mm_>0, _N_>0]
```

Si attribuiscono dei valori numerici alle grandezze già introdotte e si proceda con il calcolo del momento d'inerzia della sezione circolare cava.

$$J = \iint_A \eta^2 dA = \int_0^{2\pi} \eta^2 s * r_m d\theta$$

Tale formula è valida nell'ipotesi di spessore sottile ($s \ll r_m$) e considerando che η dipende da θ secondo la formula:

$$\eta = r_m \cos\theta$$

```
definisco un dimensionamento di riferimento
per le valutazioni numeriche
```

```
(%i7) dim : [
      dm = 38 * _mm_,
      t  = 2  * _mm_,
      eta = 2 ,
      E  = 210000 * _N_/_mm_^2,
      nu = 3/10
];
dim : append ( dim , ev([
      a = 4/3 * scala * (dm+t/2+t/2) ,
      b =          scala * (dm+t/2+t/2)
] , dim) );
dim : append ( dim , ev([
      l = sqrt(a^2+b^2) ,
      A = %pi * dm * t ,
      J = integrate( (dm/2)^3 * cos(theta)^2 * t , theta, 0 , 2*%pi ) ,
      G = E / 2 / (1+nu)
] , dim) );
```

$J = \text{integrate} \left(\left(\frac{dm}{2}\right)^3 * \cos(\theta)^2 * t , \theta, 0 , 2*\pi \right)$

Così facendo si calcoli l'errore relativo tra caso reale iperstatico e caso semplificato isostatico, come $e_{rel} = (\delta_{iper} - \delta_{iso}) / \delta_{iper}$, dove δ_{iper} e δ_{iso} sono gli spostamenti valutati nei due casi. Si ottiene così un errore relativo del 2%, legato alla maggiore cedevolezza delle cerniere.

```
Definisco l'errore relativo tra la valutazione del cedimento
del sistema reso isostatico mediante le cerniere e il telaietto
originario
```

```
(%i39) relerr : ( delta_iso - delta_iper ) / delta_iper$
(%i40) ev( relerr , dim , scala=10 , infeval )$
      %,numer;
(%o41) 0.011708940685472
```

Si è ora in grado di creare un grafico che mostra la variazione di errore relativo in funzione dell'incremento di spessore t della parete. Si introduce, tra i comandi, un parametro *scala*; inoltre si crea un grafico logaritmico utilizzando la sintassi *[logx]*, *[logy]*.

```
proviamo a costruire un grafico per valutare
in un caso specifico (pur parametrico) l'errore del
metodo semplificato
```

```
--> plottami : ev( relerr , dim , numer , infeval )$
--> ev(plottami,scala=1.0);
%o51) .3534855212881139
--> wxplot2d(
      plottami,
      [scala,1,100],
      [logx],
      [logy]
);
```

Calcolo del coefficiente correttivo

Per il calcolo dell'energia potenziale elastica U della maglia triangolare è stato necessario attribuire un valore numerico al coefficiente correttivo α legato al taglio (si è preso $\alpha=2$ per sezioni circolari sottili); si ricavi tale valore come rapporto tra il contributo energetico esatto e il contributo energetico nominale.

Nel maxima si introduce la sintassi per definire una grandezza in funzione di un dato parametro. Si utilizza il comando *define*. Qui di seguito viene riportato un esempio:

```
definizione di eta( ) come FUNZIONE di un argomento phi
--> define(
      eta( pippo ),
      rm * cos(pippo)
    ) ;
--> eta( phi );
```

Si consideri una generica sezione sulla quale è applicato un taglio T_η (quindi con $T_\xi=0$); sul generico elementino agiranno le tensioni $\tau_{z\xi}$ e $\tau_{z\eta}$ (vedi Figura 5).

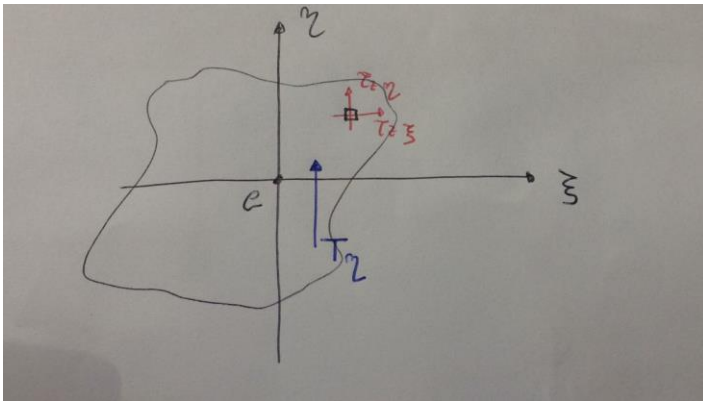


Figura 5: Applicazione del taglio e sforzi agenti sul generico elementino

L'energia potenziale esatta sarà pari a:

$$U = \frac{1}{2} (\tau_{z\xi} * \gamma_{z\xi} + \tau_{z\eta} * \gamma_{z\eta}) = \frac{1}{2} \frac{\tau_{z\xi}^2 + \tau_{z\eta}^2}{G} = \frac{1}{2} \frac{\tau_{eq}^2}{G}$$

È quindi possibile calcolare l'energia potenziale elastica andando a valutare numericamente τ_{eq}^2 ; per fare ciò applichiamo la formula di Jourawski a una sezione circolare cava (identica al caso simulato); si considera metà sezione, essendo quest'ultima simmetrica (vedi Figura 6). L'energia potenziale determinata dovrà quindi essere moltiplicata per 2.

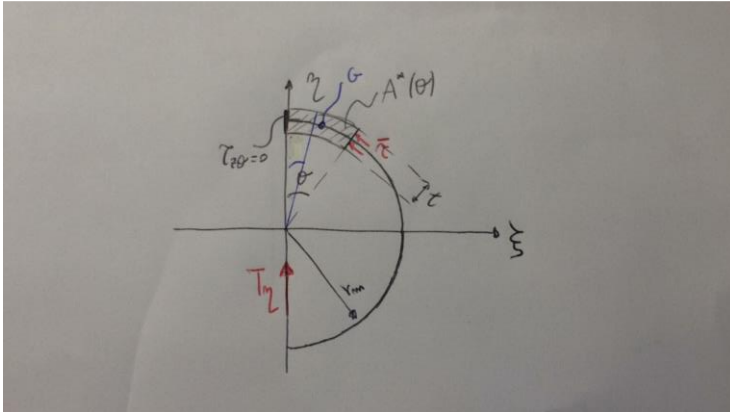


Figura 6: Metà della sezione cava in parete sottile alla quale applico Jourawski

Si applichi la formula di Jourawski per determinare τ_{eq}^2 :

$$q = \bar{\tau} t = \frac{(T_{\xi} J_{\xi\xi} - T_{\eta} J_{\xi\eta}) A^* \bar{\xi}^* - (T_{\xi} J_{\xi\eta} - T_{\eta} J_{\eta\eta}) A^* \bar{\eta}^*}{J_{\eta\eta} J_{\xi\xi} - J_{\xi\eta} J_{\xi\eta}} = \frac{T_{\eta} A^* \bar{\eta}^*}{J_{\xi\xi}}$$

dove si valutano l'area, il momento d'inerzia $J_{\xi\xi}$ e il momento statico $S_{\eta} = A^* \bar{\eta}^*$

```
calcolo area
[ (%i6) A : integrate( t * r_m , phi, 0 , 2 * %pi);
  (%o6) 2 pi r_m t
```

Per quanto riguarda il momento d'inerzia $J_{\xi\xi}$:

```
calcolo momento d'inerzia
[ --> J_xixi : integrate( eta(phi)^2 * t * r_m , phi, 0 , 2 * %pi);
```

Infine per il momento statico:

$$S_{\eta} = \int_0^{\theta} \eta(\varphi) t r_m d\varphi$$

calcolo momento statico del primo ordine rispetto all'asse xi

```
Sstar_xi = Astar * etaGstar
```

come funzione dell'angolo theta a cui effettuo la separazione del concio di concio di trave

```
(%i7) assume(theta>0);
```

```
(%o7) [theta>0]
```

```
(%i8) define(
```

```
    Sstar_xi(theta),  
    integrate( eta(phi) * t * rm , phi , 0, theta )  
);
```

```
(%o8) Sstar_xi(theta):=rm^2 t sin(theta)
```

Col MAXIMA si può adesso scrivere la formula di Jourawski:

```
applico le considerazioni di equilibrio alla Jourawsky
```

```
--> define(  
    tau_zt(theta),  
    T_eta * Sstar_xi(theta)/J_xixi/t  
);
```

Integrando il risultato ottenuto e imponendolo uguale all'energia potenziale nominale si ricava il valore del coefficiente correttivo.

integro la densità di energia potenziale elastica sull'area della sezione, ottenendo l'energia potenziale elastica per unità di lunghezza del tratto di trave

```
(%i10) dU_dl:  
integrate(  
    1/2 * tau_zt(phi)^2 / G * t * rm,  
    phi,  
    0,  
    2*%pi  
);
```

```
(%o10)  $\frac{T\_eta^2}{2 \pi rm t G}$ 
```

tale contributo è associato al termine

$$\alpha * T_{\eta}^2 / 2 / A / G$$

imponendo che siano uguali, trovo il coefficiente correttivo alpha

```
(%i11) eq: dU_dl= alpha*T_eta^2 / 2 / A / G;
```

```
(%o11) 
$$\frac{T_{\eta}^2}{2 \pi r m t G} = \frac{\alpha T_{\eta}^2}{4 \pi r m t G}$$

```

Calcolo alpha

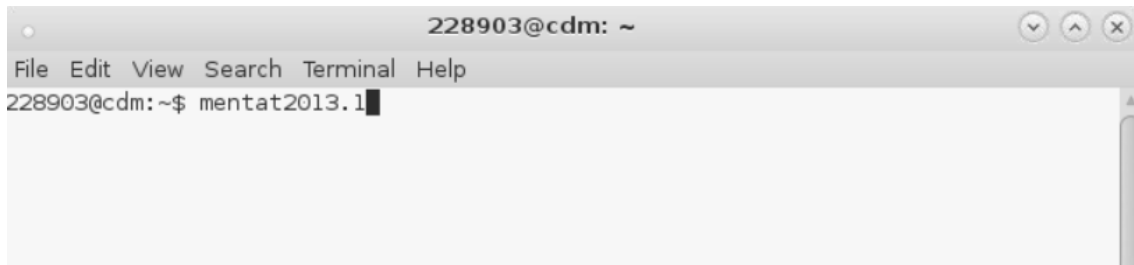
```
(%i12) linsolve(eq,alpha);
```

```
(%o12) [ $\alpha=2$ ]
```

Primi passi col FEM

Aprò il terminale e inserisco la seguente riga di codice:

mentat2013.1

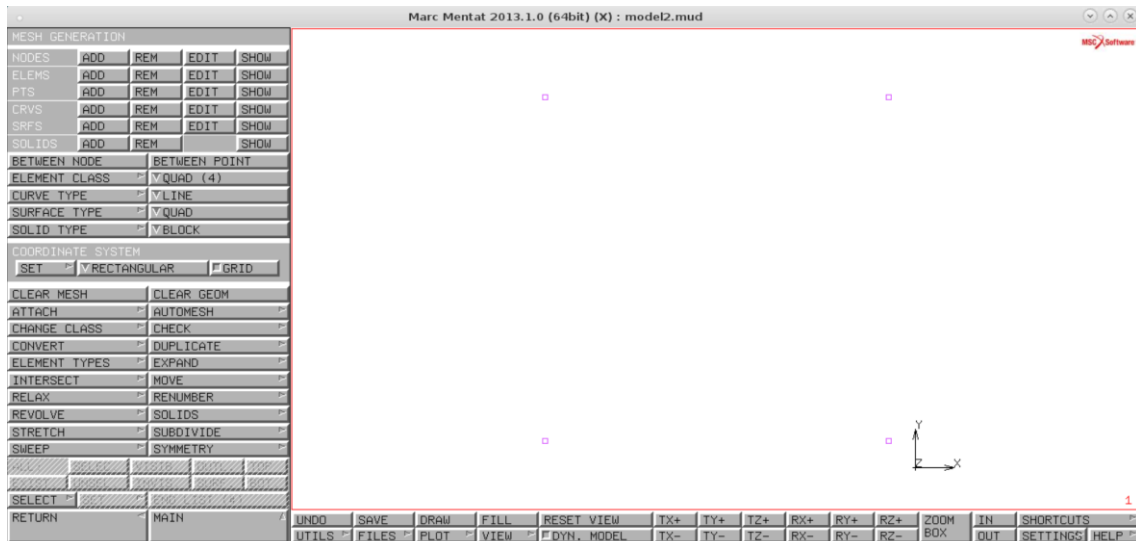


Il software FEM Marc Mentat viene dunque avviato.

Creazione della Mesh

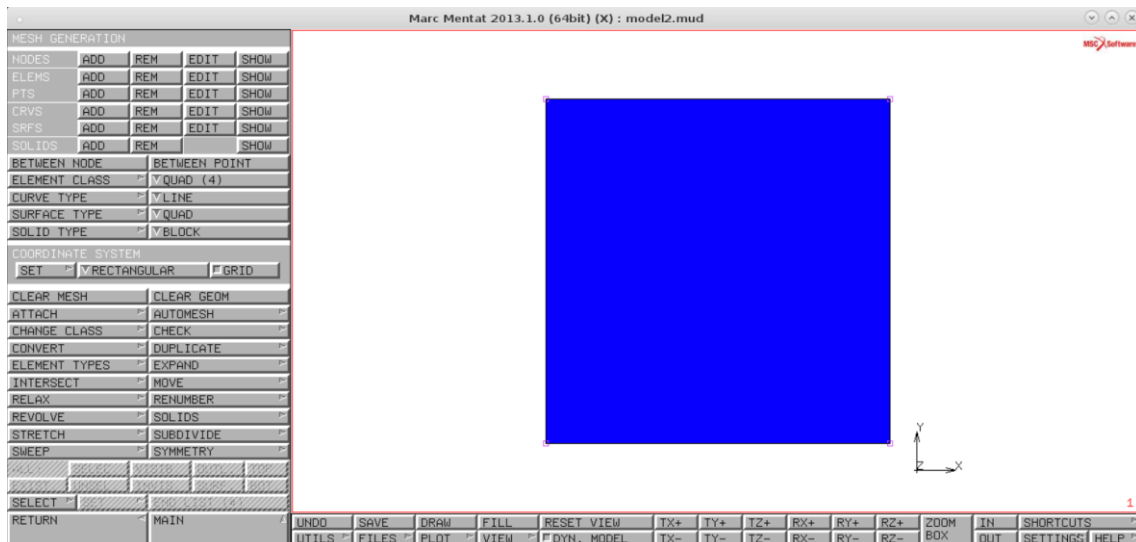
Si vuole costruire un elemento piastra formato da 4 nodi. Si inseriscono dunque nel Mentat le coordinate dei nodi.

Mesh generation → Nodes → add: (-1;-1;0), (1;-1;0), (1;1;0), (-1;1;0)



Si costruisce adesso la geometria in parete sottile. Controllo che su “*Element class*” sia attivo “*Quad(4)*”

Mesh generation → elements → add: seleziono i nodi in senso antiorario per avere circuitazione positiva



Questo rappresenta il piano medio di un corpo in parete sottile al quale, successivamente, verrà associato uno spessore pari ad 1 mm.

Appendici

Lista dei simboli

P	Carico generico applicato alla struttura
N, T, M_f	Sforzo normale, taglio e momento flettente applicati alla struttura
$U(P, N, T, M_f)$	Energia potenziale associata alla struttura considerata
$\delta_N, \delta_T, \theta$	Spostamenti e rotazioni della struttura dovuti all'applicazione di N, T, M_f
S	Momento statico
J	Momento d'inerzia
U	Energia potenziale
G	Modulo di taglio
τ	Sforzo tangenziale

Riferimenti

Per i file completi in maxima si guardi:

[maglia triangolare v004b.wmx](#)

[valutazione coeff taglio energia trave v000b.wmx](#)

Per la simulazione FEM invece si faccia riferimento a:

[monoelem piastra v000b.mfd](#)

Autori e carico orario

Ore dedicate alla stesura/revisione degli appunti di questa lezione¹.

Autore/Revisore	Prima stesura	Revisione	Seconda stesura	Totale
Adamo Mango	7			
Francesco Mariotti	7			
Mattia Olcuire	7			
Revisore 1				
Revisore 2				
Revisore 3				
Totale				

¹La sezione relativa ai revisori è da compilarsi a cura del curatore.